西安电子科技大学

博士学位论文

分形理论中若干问题的小波解法

姓名：侯建荣

申请学位级别：博士

专业：应用数学

指导教师：宋国乡

2001.3.1

摘要

现代分形理论中存在有许多问题尚待解决，尤其关于分维数的计算、分形反问题及奇异性分析等方面的研究为重点。小波在处理非平稳性和局域分析方面有着独特的优越性，可被用来提取有关分形尺度性质的细微信息。本文以小波理论为工具围绕分形中若干问题进行了探讨，主要提出并解决了如下问题：

1．分析了分形曲线维数的传统计算方法及其缺陷，提出了多分维分形曲线的模式。基于小波阈值去噪方法，给出曲线上点的局部分形维数的计算公式及算法。仿真计算结果及图示均表明该法是有效的。

2．基于小波变换在零点具有的的保相似形特征，在已知分形插值函数图象情况下，从有限数目个零点出发，给出寻找一组仿射压缩变换使该函数图象成为未知迭代函数系统吸引子的一种构造方法。

3．提出了分形时变维数的概念，将其引入两类具有局部自相似性的有偏随机过程中。借助小波基固有的尺度特性很适合分析非平稳性和局部自相似性这一特点，给出赫斯特指数的小波估算公式及算法，证明了小波估算值和真实值是相容的，并用仿真结果加以验证，同时对上海股票市场周指数变化进行了实证分析。

4．借助小波变换对自相似过程所起的白化作用和最小二乘法，建立了无须知道 $1/f$ 过程中参数分布的谱参数估计方法。

5．提出在最优尺度上跟踪小波模极大值线的参数方法，为研究多分形谱奇异性提供了一种途径。探讨了分形测度小波变换极大值线的拓扑分岔情况，并提出了一种基于小波变换模极大值的多重分形谱估算方法。

关键词：　时变维数；小波变换；迭代函数系；多重分形；拓扑分岔

Abstract

There are many problems to be solved in modern fractal theory, especially focuses on studies of computation on fractal dimension,inverse problem and sigularities. The scale property of wavelet is well suited for analyzing non-stationarity and localization and used to extract microscopic information about the scaling properties of fractals. In this dissertation, based on wavelet theory,the following probloms are discussed:

1. Traditional computional methods and limitation of dimension of fractal curve being analyzed ,A model of fractal curve having multidimension is proposed. Based on noise reduction for wavelet softhresholding, computional formula and algorithm about point-wise local dimension on the curve are given. Results from simulations show the validity of he algorithm.

2. Given a graph of a fractal interpolation function which is the attractor of an unknown IFS with affine constration maps, the maps are found based on the self-similarity of the zero-crossing points of wavelet transform. The effectiveness of method is shown in an example.

3. The concept of time-varying dimension are proposed and introduced in two kinds of biased stochastic process with locally self-similarity. The estimation formula and algorithm of Hurst Index are based on Daubechies wavelet analysis of samples dada . Simulation result indicates effectiveness of estimation method and proves that estimation value is a consistent result of true value. Week-index analysis of Shanghai stock market is taken as a real example by time-varying dimension.

4. Based on correlation-decaying charecteristics of discrete wavelet coefficients of $1/f$ processes and the least-square algorithm ,estimation for spectral parameter of $1/f$ processes is presented without knowing the distribution of the parameter.

5. A parameterization method for tracing wavelet maxima lines at the finest scale continuously is presented, by means of which the sigularity of multifractal spectrum can be analyzed well. Topologic bifurcation situation of maxima lines is also discussed. In the end ,an estimation for multifractal spectrum is proposed in terms of wavelet module maxima lines.

Keywods: time-varying dimension wavelet transformation interated function system Multifractal topologic bifurcation

第一章 绪论

1.1 分形理论的发展及应用

分形理论是非线性科学研究中一个十分活跃的分支，它的研究对象是自然界非线性科学中出现的不光滑和不规则的几何体。虽然分形理论在本世纪 70 年代才提出来，但经过十几年的发展，它已广泛应用到自然科学和社会科学的几乎所有领域，成为当今国际上许多学科的前沿研究课题之一。

1．1．1 分形理论发展的历史进程

第一阶段（1875 年---1925 年），人们已经认识到几种典型的分形集，并且力图对这些集合与经典几何的差别进行描述分类和刻画。19 世纪尽管人们已经能够区别连续与可微的曲线，但是普遍认为 连续而不可微的情形是极其少的，并在理论研究中应该排除这类“怪物”，而且更进一步认为一条连续曲线上不可微点应当是很少的。维尔斯特拉斯(Weierstrass)在 1872 年证明了一种连续函数在任意一点均不具有有限或无限导数。这一结果在当时曾引起极大震动；但人们还是认为维尔斯特拉斯型的函数是极端“病态”的例子。即使如此，人们依然从不同的方面推广了上述函数，并对其奇异性作了深入的研究，获得了极为丰富的结果。

康托尔(Cantor)在 1872 年引入了一类全不连通的紧集，后被称为康托尔三分集[1]。其构造过程是这样的：对于单位直线段l_0，去掉中间三分之一的线段后所得图形为l_1。然后对l_1的每个线段都进行同样的操作过程。依次类推，便可以得到一个曲线序列$\{l_k\}$。当k趋于无穷大时，曲线序列$\{l_k\}$趋向于一个极限曲线L，则L就是康托三分集。这类集合在三角级数的唯一性这样重要问题的证明中发挥了非常的作用。

1890 年皮亚诺(Peano)构造出了另一类能够填充平面的曲线，从而引起人们开始对以往长度和面积概念的反思[1]。皮亚诺曲线及其它的例子导致了后来拓扑维数概念的引入。

冯•科赫(Von Koch)[1] 于 1904 年采用初等方法构造出了现今被称为冯•科赫曲线的处处不可微的连续曲线，并且讨论了曲线的性质。这种曲线构造方面的简单性，一改人们一直认为连续不可微曲线构造一定非常复杂的观念。

由于这一时期各类复杂集合的出现，人们重新认识长度、面积等这些数学基概念。为了测量这些集合，在1901年闵可夫斯基(Minkowski)引入了闵可夫斯基容度概念，进一步的结果是，豪斯道夫(Hausdorff)于1919年引入了豪斯道夫测度和豪斯道夫维数[13]。这些概念的产生表明，要测量一个几何对象，人们必须依赖于测量方式和测量所采用的尺度。

在二十世纪的初期，一类典型的随机分形集—Brown运动[4],[5],[6]已受到物理学家们的重视。1913年柏瑞(Perrin)对粒子Brown运动的轨迹图进行了深入细致的研究，得出了Brown运动作为运动曲线不具有导数的结果。他的这一结论引起了维纳（Wiener）的注意，也直接促使了他在1920年左右建立了Brown运动的概率模型，维纳此时采用“混沌”一词来表达这种极端的混乱形式。

曼德尔布罗特(Mandelbrot)[1]在回顾这一时期的分形几何历史时指出，分形几何以下面两种选择方式作为其特征：一是在自然界的混沌中选择问题；二是在数学中选择问题。这两种选择逐渐融合，从而在无序混沌和过分有序的欧氏几何之间产生出了一个具有分形序的新领域。

第二阶段（1926年—1975年），在这半个世纪里，人们对分形集的维数的研究获得了丰硕的成果[15],[17],[18],[19]，不仅逐渐形成了理论，而且研究的范围扩大到数学许多分支中去。以贝西可维奇(Besicovitch)为代表的一批学者研究了曲线的维数、分形集的结构及局部性质以及在数论、调和分析、几何测度论中的应用。Bouligand 1928年引入了Bouligand维数,Poutrjagin与Schnirelman在1932年引入了覆盖维数，柯莫哥洛夫(Kolmogorov)与Tikomirov于1959年引入了熵维数。列维(Levy)在下面两方面的研究成果至今看来仍然显得非常重要：其一，他第一个系统地研究了自相似集，现今人们所知许多自相似集的性质几乎都可以追溯到他的工作；其二，他建立了分数布朗运动的理论，可以说，他是随机分形理论研究最重要的先驱者之一。以Salem与Kahane为代表的法国学派则从稀薄集的研究出发，对集及做了系统的研究，体现出了其独特的理论方法和技巧，并在调和分析中找到了其重要的应用。与此同时，维数的乘积理论、网格测度计算技巧、位势方法及投影理论等均先后被建立起来。所有这些已经使得分形科学的研究具有了自己的分析特色和方法。

尽管这一阶段的研究取得了这么多成果，但是绝大部分人主要局限于对数学理论的研究而未和其它学科发生联系。另一方面，物理、地质、工程学等学科则已产生了大量和分形有关的问题，迫切需要新的理论思想和有力的工具来处理。正是在这样的背景情形下，自六十年代以来，曼德尔布罗特以其独特的思想，先后系统深

入地研究了海岸线的结构、月球表面、地貌生成的几何性质、强噪音干扰下的电子通讯等自然界中大量典型的分形现象。

第三阶段（1975年至今），分形理论在各个领域的应用取得了全面的发展，并形成了独立的学科。曼德布罗特将前人的结果加以总结，集其大成，于1975年以“分形：形状、机遇和维数”为名发表了他的划时代的著作。他是第一个跳出传统物理学和几何学的人。在这本专著中，他第一次系统地阐述了分形几何的思想、内容、意义和方法，标志着分形几何作为一门独立的学科正式诞生。但是，关于分形是否是一门数学科学的讨论在这个时候也此起彼伏，更加激烈。特别一提的是，1988年以来B.B.Mandelbrot与S.Krantz[97]一直在为分形的价值而争论不休。Krantz认为“分形没有明确的定义，作为一个数学家，我觉得这不是一个好兆头”，“他们产生图形是为了得到更多的图形，而不是为了得到更深刻的思想”。Mandelbrot则认为“有关分形的研究加深了我们对自然的理解。如果我只是证明了少数几个定理的话，那么用这些定理就很难发现现在还没有创立的或潜在的研究领域”。这场Mandelbrot与Krantz最具代表性的争论甚至被称为“是一场关于数学灵魂的战斗”。

争论总归争论。自1975年以来，分形理论在数学基础和应用方面都取得了相当迅速的发展。在物理的相变理论、材料的结构、力学中的断裂与破坏、高分子链的聚合、酶的生长机理研究、自然图形的模拟和模式识别等领域取得了令人满意的成就[23],[12],[90],[92]。近十几年来，在非线性应用学科和计算机制图的刺激和推动下，分形的数学理论也得到了更加深入的发展，这主要体现在以下几个方面：分形维数的估计与算法，分形集的生成结构，分形的随机理论，动力系统的吸引子理论，分形的局部结构，小波分析方法开始在分形分析中得到应用。这其中特别值得一提的是，Barnsley[7],[8],[9]利用一类设定的迭代函数系统来逼近分形的不变性，从而成为开创了分形反演问题的先驱。后来，在A.Arneodo、Z.R.Struzik、Vrscay、Forte、朱治军和李后强等人[30],[31],[33],[32]的努力下，再加上客观上图形压缩的迫切需要，分形反演问题的研究增掀起了一场高潮。在此期间，自然科学中的分形学术论文呈指数增长趋势，哲学社会科学领域中涉及分形的论文和书籍也不断增加。国内国际有关分形的专题会议有增无减，特别是在八十年代后期，令人感到了雷霆万钧之势。国际学术刊物《混沌、孤子和分形》(Chaos,Solitons and Fractals,Pergamon Press,1991)和《分形》(Fractals,World Scientific,1993)已先后问世，分形学科从此就有了属于自己的一块阵地。

“分形”一词传入我国以后，立即在各行各业中引起了广泛的传播，研究分形理论及应用的队伍日益壮大。我国政府和学术界很早时候就都对分形理论一直持积极的肯定态度，并给予了极大的支持。在国家863攀登计划《非线性科学》项目中，列出了“分形的数学理论”（随机多分形的数学理论、维数的计算方法等）、“分形的物理机理”（多重分形结构、分形统计模型的相变、酶结构分析、动力学集团的生长等）两大发展方向，国家自然科学基金申请指南中也已列出“分形理论及其应用”(A01020405)内容。在分形的数学理论发展方面，国内南京大学学者苏维宜教授[14]在1990年研究了分形与局部紧群上的调和分析，熊金城、吴敏、胡晓予等人[15],[17],[21],[22]则分别在1994年至1995年各自研究了一类特殊集合的维数问题，张永平[98]在分形微积分方面提出了采用多项式最佳平方逼近来定义分形函数拟导数概念的方法，胡迪鹤[20]则在研究随机分形方面获得了较大的成功。朱治军和李后强两人[33]对分形反问题进行了较深入的研究，弥补了国内在此问题研究方面上的不足。

1.1.2 分形及其维数的定义

什么是分形？事实上，到目前为止，分形还没有严格的数学定义，只能给出一般描述性的定义。有关分形的概念，科学史上有记载的最早是由Hausdorff于1919年引入,随后经Besicovitch于1935年和Mandelbrot于1975年加以改进和发展。

Mandelbrot是美籍法国科学家，在撰写他的分形学奠基性著作《分形，机遇和维数》中碰到法语动词frangere（破坏）变来的形容词fractus，联想到英语中的同源词fracture（断裂）和形容词fraction（分数），他在这些词的基础上创造了分形fractal一词。Fractal最初的意思是破碎的和不规则的，并将分形定义为具有某中意义下的自相似集合。Mandelbrot[1]也曾对分形做了一个尝试性的定量刻画，认为分形是Hausdorff维数严格大于其拓扑维数的集合，但这些定义都不够全面和精确。英国数学家在其著作中认为，分形的定义应该以生物学家定义生命的类似方式给出，也就是说不寻求分形的严格确切简明的定义，而是寻求分形的特性，在这种观点的指导下，人们将分形看成是具有如下性质的一类集合：

1. 具有精细的结构，即在任意小的比例尺度内包含了整体，类似于生物中的 全息律；
2. 分形既可以是几何图形，也可以是由“功能”或“信息”建立起来的一种数理模型；
3. 具有不规则性以致它的整体与与局部都不能用传统的几何语言来表达；

4. 具有某种自相似的形式， 可以是严格自相似的也可以是统计意义上的相似性，自然界中的大部分分形均属于后一类；
5. 可以同时具有形态、功能和信息三方面的自相似性，也可以只是其中某一方面的自相似形；
6. 相似形具有层次结构方面的差异。数学理论上的分形具有无限嵌套的层次结构，而自然界中的分形只是有有限层次的嵌套，在进入到一定的层次以后才会有分形的规律；
7. 相似形具有级别上的差异（生成元的使用次数或者放大倍数）。 级别愈接近，则愈相似。级别相差愈大，相似形也就愈差。整体的级别最高，最低的是级生成元。可以用无标度区间或者标度不变形范围加以表示。自然界的分形往往均具有一个最大和最小的标度，在无标度区域内，对象才具有分形规律，否则，一旦越过无标度区，自相似性也就随之消失；
8. 一般情况下，以某种方式定义的分形维数大于该分形的拓扑维数；
9. 在多数令人感兴趣的情况下，分形常常以非常简单的方法来定义，或许是一种递归方式；

国内学者也对分形的定义进行了专门的研究， 吴敏金[96]在其分形信息导论一书中讨论了分形的定义问题， 认为分形是一个不断分化演变的动态过程， 并从演化的观点在这方面做出了许多开创性的工作。

分形度量则是另外一个与分形概念相关的比较敏感的问题， 大多数分形集的定量刻画和判别要借助于参数——维数概念， 因此维数的定义也是一个人们比较关心的问题。

历史上对维数的认真研究似乎直到 19 世纪后半叶才开始。 此前，虽然 Peano 和 Minkowski 都对维数的定义提出过重要的思想，但都只是直观上的描述，还缺乏严格的数学定义。 最初人们常把维数理解为所研究几何对象的坐标数， 是描写空间内一个点所需的最少实参数的个数。 在物理世界里， 自然界客体的维数与所在空间的维数有时是不同的客体的维数与测量尺度有关。 从远处观察一个毛线团， 人们可把它看成是一个点， 而从近处观察它， 则人们会认为它是一条空间曲线。 经典的 Peano 曲线例子就是通过连续映射将一个区间映射到一正方形， 在这样的情形下， 上述维数观点也就失去了支持。 维数的一个重要进展应该首推 Hausdorff 于 1919 年引入的维数概念。该维数以 Hausdorff 测度为基础，且适合于任何集合，从定义出发作维数的计算是相当困难的，这种计算上的困难也极大地限制了 Hausdorff 维数的应用。但要了解分形， 人们就有必要了解 Hausdorff 测度与 Hausdorff 维数。 随着分形应用研

究的不断深入，分形维数的定义多种多样，只能根据不同的研究对象来使用各别的计算方法。除 Hausdorff 维数以外,还有相似维数、计盒维数、容量维数、填充维数、Kolmogorov 维数、Lyapunov 维数等（请参阅一般的分形书籍[12],[2],[24]）,而且这些维数之间的关系还没有理顺。大多数分形维数的定义均是基于“尺度δ下的度量”这一思想。设F是一分形集，对于每个$\delta>0$，忽略尺度小于δ的不规则性，并且考虑测量值$M_\delta(F)$在$\delta\to0$时的情形。若存在两个常数$k\ge0$和$s\ge0$，使得$M_\delta(F)$满足下面的幂律：

$$M_\delta(F)\sim k\delta^{-s}$$

则称集合F具有维数s，而k可作为集合在s维下的长度。

另外一种关于分形维数的理解是由我国学者赵辉和孙博文[78]提出来的。他们认为维数是集合层次的量值标号。当人们从不同的角度考查一个集合中的元素时，就会发现这些元素具有差异性。此时，我们可以赋予集合某种“层次结构”，按这个层次结构对集合的元素去分类处理，每一类中的元素属于同一层次，不同层次中的元素相对于考查内容来说具有质的不同。在确定的层次中去考察不属于该层次的元素时，“奇异性”也就难免产生了。例如，在一维层次中（使用测度为 1）去观测一条有界直线的测度时，得到的是一个有界实数，同样去观测 Von.Koch 曲线的测度时，则得到数学上的“无穷大”结果。相反，在 Von.Koch 曲线层次中（使用测度为$\ln4/\ln3$）观测一条直线时，得到的是“无穷小”的结果，而去观测 Von.Koch 曲线则都是一个有界实数。由此可见，集合的奇异性或复杂性的产生是由于人们跨越层次考察事物导致的。

综上所述，由于分形的确切定义尚未给出，因此分形的度量——分维数也就难以精确定义，至今仍缺乏统一的计算公式与算法。

1.1.3 目前分形几何学的研究工具和研究方法

分形集无论在局部还是在整体都是不光滑的，这就决定了经典数学中与微积分有关的许多分析工具在这里不能发挥其作用。分形早期的主要研究工具是点集拓扑与集合测度论，这主要体现在 Besicovitch 和 Hausdorff 两人的研究工作中。另外一种重要的工具是 Julia 等人所采用的复动力系统理论。借助计算机的强大能力，Julia 集和 Mandelbrot 集[24]的精细复杂而美丽诱人的结构展示于世人的面前，这也是分形能够广泛而迅速为人们所接受的一个重要原因。

自从八十年代后期 M.F.Barnsley[7],[8]采用迭代函数系统 IFS(Iterated Funtion System)构造出许多分形以来，迭代函数理论的研究方法和手段也就组成了研究分形的重要部分，这其中包括函数迭代、序列迭代等。由于单位区间上每一点都可以看做是一个十进制的符号序列，因此，对于和一般符号序列复杂性研究有关的连分数理论、遍历理论、符号动力系统理论都是现阶段研究分形的新工具。

特别值得一提的是，近几年来，有“数学显微镜”之称的小波分析理论为具有“无穷精细结构”的分形的研究提供了一个绝好的分析工具，通过小波变换，人们可以看到分形对象的丰富细节，为推测分形生成的动力学根源提供了方便。这主要体现在 Argoul、Arneodo、Holschneider、Struzik、李后强等人[93],[94]的工作中。另外，本人在论文中也做了一些有关这方面的研究工作。

在方法上，除理论性的研究外，通过计算机强大的计算能力和图形能力，开展“实验数学”方法在分形的研究中也将起到重要的作用。在实验的基础上进行理论的思考，实验有助于人们更好的借助“直觉”理解数学规律，Mandelbrot 在创立分形几何时就曾经使用该方法。美国大学已经设立了实验数学系。随着计算机辅助方法的大量使用和推广，有理由相信，实验数学有可能成为一门探索性的独立学科。

1．1．4　目前分形理论研究中存在的主要问题及动向

分形理论是在发展中不断完善和走向成熟的。1993 年在中国科技大学召开的全国第三界分形学及其应用研讨会上，李后强等人[26],[28]就此后一个时期分形学及其应用研究提出了以下 5 个大问题和 10 个方面。这些问题在一定程度上代表了目前分形研究的热点。

1．如何判断一个对象是分形或多分形的问题

如前所说，分形没有完整而精确、一致公认的定义，要判断分形与多分形是很困难的。也有人认为，分形就象生命一样理解其含义就可以了。在理论上，自仿射性是分形产生的重要方式，所以有关自仿射性方面的研究应该是一个重点方面。但对于实际中出现的分形进行判断依然是一个复杂而未解的问题。

2．分数维所代表的实际意义问题

分数维到底有什么用？这个问题是关乎分形这门学科的优势及其存在价值的大事。在这方面 Hausdorff 维数的意义比较明确，它可定量地表示一个集合规则或不规则的的集合尺度，而在动力系统方面，则大体上表示独立变量的个数。多分形的奇

异谱主要表征多分形的奇异性。在时间序列中所用的关联维数或广义维数也反映了序列的某种相关性和复杂程度。继续探索各类维数的实际意义仍然是今后工作的一个方向。

3．分形的动力学机制问题

研究分形体集团生长的时间演化规律和结构的标度行为，可以改变分形理论中仅仅只对分形进行形态描述的单调而被动的局面。非平衡物理学中的耗散结构理论和协同学中许多概念有必要引入分形的研究领域，另外对于分数阶微分方程、非线性发展方程、神经网络方面也应该予以一定程度的关注。要重视随机噪音对分形系统的影响。这方面最漂亮的成果是，在对扩散凝聚集团 DLA 生长过程的研究观测中，国外 Witten 和 Sander 成功地建立了其分形生长动力学模型。

4．分形的重构问题

广义而言，分形重构是指一个被认为是分形的图形能否以某种指定的方式生成它。这是动力系统研究领域中的反问题。分形所表现出的自相似性和拟自相似性基本上都和迭代、递归过程有关联。Barnsley 和 Demko[10]最早进行了用不变测度 IFS 逼近目标测度的工作。矩量法和拼贴定理[31],[95]是研究该类问题的两个基本方法。这主要体现在 Vrscay 和 Forte 等人的一系列研究工作中。近几年来，把小波分析方法应用于分形反问题研究，也获得了许多好的结果（可参阅本论文第三章内容）。分形重构问题对于图形和数据压缩有着非常重要的意义，这方面研究工作急需继续努力和深化。

5．关于 Julia 集和 Mandelbrot 集的问题

动力系统中的 Julia 集和 Mandelbrot 集是复多项式迭代后的结果。研究各类多项式（如整系数多项式和代数整系数多项式等）的填充 Julia 集内准周期点的代数特性，有关 Mandelbrot 集是否是局部连通的及边界维数的计算,这些问题一直是分形研究中的难点和热点之一。

以下 10 个方面有待尽快研究以取得突破：

1．随机多分形的数学理论；

2．分形曲线的导数问题；

分形集往往存在分数阶导数，这种分数阶导数对刻画分形对象有重要的作

用并由此建立一个完整的分数阶微积分体系。

3．分形的小波分析及小波变换产生分形的关系问题；
4．分形分维数的计算问题；
5．多分形的热力学及相变普适性判据问题；
6．原子、分子的分形问题；
7．胖分形及重正化混沌问题；
8．自组织临界现象及负幂律问题；
9．生物膜的分形结构及其与膜病变的关系问题；
10．图形的分形压缩问题；

1.2 小波理论及其在分形有关问题中的应用

1．2．1 小波的发展及定义

小波变换分析方法是八十年代中后期逐渐发展起来的一种数学分析方法，是调和分析近四十年来的一个突破性进展。它在保留了 Fourier 分析优点的同时，又弥补了 Fourier 分析不能作局部及非平稳分析等不足，在理论分析和实际应用中得到蓬勃的发展，目前正受到数学界和工程界的极大重视[58]-[63],[119]。

小波分析是数学家、应用数学家和信号处理、数据处理工程师们在各自工作领域分别独立发现的。小波分析方法的提出，最早应追溯于 Haar 在 1910 年提出的规范正交基。1938 年,Littlewood-Paley 对 Fourier 级数建立了 L-P 理论，即按二进制频率成分分组，Fourier 变换的相位变换本质上不会影响函数的形状与大小。在 1965 年 Galderon 发现了再生公式,它的离散形式已接近小波展开，只是还无法得到一组正交系的结论。Stromberg[38]在 1981 年对 Haar 系进行了改进,证明了小波函数的存在性。1982 年 Battle 在构造量子场论中采用了类似于 Galderon 再生公式的展开 式。

小波概念的真正出现应该算于 1984 年。 和 Fourier 分析一样，小波分析包括两个部分的内容：小波变换和小波级数。

小波变换是由法国科学家 J.Morlet1984 年[39]在分析地震波的局部特性时引入的，并首次提出小波(Wavelet)这一术语。所谓小波就是小的波形，“小”指其具有衰减性，“波”指其波动性，具有振幅正负相间的震荡形式。随后，J.Morlet 和物理学家 Grossman 等人共同建立了完整的连续小波变换几何体系，其基础是平移和伸缩

下的不变性，这使得能将一个信号分解成对空间和时间尺度的独立贡献，同时又不丢失原有信号的信息。

小波级数理论则依赖于小波基的发展。法国马赛大学的数学家 Y.Meyer[40],[84]在1985年将 J.Morlet 的思想与数学研究中已存在的奇异积分算子理论联系起来，构造了具有一定衰减性的光滑函数，其二进制尺度位移体系构成了 $L^2(R)$空间的一组标准正交基，同时 Y.Meyer 与 A.Grossman 及比利时女数学家 I.Daubechies[37],[83]合作，通过构造 $L^2(R)$上的一准正交完备集的方法选取了小波空间的离散子集——框架，并证明了一维小波函数的存在性。稍后，P.G.Lemarie 则将这一结果推广到 n 维情况，并和 G.Battle 给出了具有指数衰减的小波函数。I.Daubechies[54],[72]1988 年发表了她的著名长篇论文，证明了具有有限紧子集的正交小波基的存在性。S.Mallat[41],[51],[65],[71]在1989年将计算机视觉领域内的多尺度分析思想引入到小波分析中，提出多分辨率分析 MRA(Multiresolution Analysis)概念，统一了在此之前所有具体正交小波的构造，并提出了相应的分解和重构快速算法，其地位相当于 FFT 在经典 Fourier 分析中的地位。1988年，I.Daubechies 在美国 *NSF/CBMS* 主办的小波专题研讨会上进行了 10 次讲演[47]，引起了广大数学家、观察学家、物理学家甚至某些企业家的高度重视，由此将小波分析的理论发展与实际应用推向了一个高潮。

通常小波有如下一些定义：

定义 1.2.1 (Grossman and Morlet)如果函数$\psi(x)\in L^2(\Re)$的 Fourier 变换$\hat{\psi}(\omega)$满足下式要求

$$\int_0^\infty \frac{|\hat{\psi}(t\omega)|^2}{t}dt = 1(a.e)$$

则称$\psi(x)$为$L^2(\Re)$上的一个小波函数。

定义 1.2.2 (Littlewood-Paley-Stein)如果函数$\psi(x)\in L^2(\Re)$的 Fourier 变换$\hat{\psi}(\omega)$满足下式

$$\sum_{-\infty}^{\infty}|\hat{\psi}(2^{-j}\omega)|^2 = 1(a.e)$$

则称$\psi(x)\in L^2(\Re)$为小波函数。

定义 1.2.3 (Stromberg and Franklin)[38]如果$2^{j/2}\psi(2^j x-k)$ $(j,k\in Z)$为$L^2(\Re)$的一组规范正交基，则称$\psi(x)\in L^2(\Re)$为一小波函数。

定义 1.2.4(Y.Meyer)如果一个实变量函数$\psi(x)$满足以下四个性质，则称$\psi(x)$为一个 m$(m\in Z)$类的小波：

（1）若$m=0$，那么$\psi(x)\in L^\infty(\Re)$；若$m\ge 1$，则$\psi(x)$及它的直到 m 阶导数都属于$L^\infty(\Re)$。

（2）$\psi(x)$及它的直到m阶导数在无穷远处都是速降的（局部正则性）。

（3）对于$0 \le k \le m$，有$\int_{-\infty}^{\infty} x^k \psi(x) dx = 0$（消失矩条件）。

（4）函数$2^{j/2}\psi(2^j x - k)$ $(j,k \in Z)$的集合构成$L^2(\Re)$的一组正交基。

小波函数的存在证明（构造方法）以及各种小波算法都和多分辨分析MRA及尺度函数有着密切的关系。为此下面引入多分辨分析和尺度函数的概念。

设$\{V_j\}_{j\in Z}$是$L^2(\Re)$的一个空间序列，称$\{V_j\}_{j\in Z}$是$L^2(\Re)$的一个多分辨分析，如果满足如下条件：

（1）$V_j \subset V_{j+1}$，$\bigcap V_j = \{0\}$，$\overline{\bigcup V_j} = L^2(\Re)$

（2）$f(x) \in V_j \Leftrightarrow f(2x) \in V_{j+1}$

（3）$f(x) \in V_0 \Leftrightarrow f(x-k) \in V_0$，$k \in Z$

（4）存在函数$g(x) \in V_0$，使得$\{g(x-k)\}_{k\in Z}$构成V_0的Riesz基

如果函数$\phi(x) \in L^2(\Re)$能产生$L^2(\Re)$的一个多分辨分析，而V_j是由$\phi_{j,k}$所张成的线性空间，即就是

$$V_j = clos_{L^2(\Re)}(\phi_{j,k}, k \in Z)$$

$$\phi_{j,k} = 2^{j/2}\phi(2^j x - k), j,k \in Z$$

则称$\phi(x)$为$L^2(\Re)$的一个尺度函数。然后，借助尺度函数$\phi(x)$就可以构造出小波函数$\psi(x)$来。

存在尺度系数$\{h_k\} \in l^2$，使得下面的双尺度方程成立：

$$\phi(x) = \sum_{k\in Z} h_k \phi(2x-k), \ \{h_k\}_{k\in Z} \in l^2$$

令
$$\psi(x) = \sum_{k\in Z} (-1)^k \bar{h}_{1-k} \phi(2x-k)$$

$$W_j = \overline{span\left\{\psi_{j,k}(x) = 2^{j/2}\psi(2^j x - k), k \in Z\right\}}$$

则有 $W_j \perp V_j, W_j \oplus V_j = V_{j+1}$，从而$L^2 \equiv \overline{\bigoplus_{j\in Z} W_j}$，$W_j \perp W_{j'}, j \ne j'$

$\{\psi_{j,k}\}_{j,k\in Z}$是$L^2(\Re)$中的一个标准正交小波基。

对于母小波函数$\psi(x)$，当x、a、b连续变换时，进行伸缩和平移后形成的一族小波记为$\{\psi_{a,b}\}$，则有连续小波

$$\psi_{a,b}(x) = |a|^{-1/2}\psi\left(x - b/a\right), \ a,b \in \Re^1, \ a > 0$$

对任何$f(x) \in L^2(\Re)$，以小波$\psi(x)$作为窗函数的连续小波变换定义为

$$W_{a,b}(f) = \frac{1}{\sqrt{a}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\overline{\psi\left(\frac{x-b}{a}\right)}dt$$

可见小波变换已将$f(x)$窗口化，中心在$x=b$，宽度为$2a\Delta\hat{\psi}$，得到$f(x)$的时—频局部化。$x-w$平面上的时频窗口为

$$[b-a\Delta\psi, b+a\Delta\psi]\times\left[\frac{\omega_0}{a}-\frac{1}{a}\Delta\hat{\psi}, \frac{\omega_0}{a}+\frac{1}{a}\Delta\hat{\psi}\right]$$

通常取$\omega_0>0$，由上式可见，在高频时候，时窗变窄；在低频时候，时窗变宽。这就是小波变换所特有变焦距性质。这一特性克服了窗口傅立叶变换的缺陷，从而使它在突变信号处理上具有了特殊的地位和作用。

若$\psi(x)$满足下式

$$C_\psi=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{|\hat{\psi}(\omega)|^2}{|\omega|}d\omega<+\infty$$

则称为$\psi(x)$允许小波。此时，有如下的反演公式成立

$$f(x)=\frac{1}{C_\psi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}W_{a,b}f(x)\psi_{a,b}(x)\frac{1}{a^2}dadb$$

在考虑位移和尺度均离散时的小波变换重建问题时，很自然地要引入和小波密切相关的另一个概念——框架，它是规范正交基的推广[122]。

定义 1.2.4 当$j\in J$（指标集）时，$\phi_j\in H$（Hilbert 空间）。若存在两个正数 A 和 B，使得下式成立

$$A\|f\|^2\le\sum_{j\in J}|(f,\phi_j)|^2\le B\|f\|^2, \forall f\in H$$

则称$\{\phi_j; j\in J\}$为H的一个框架，A,B 为框架的界。若$A=B$，则称$\{\phi_j; j\in J\}$为一个紧框架(Tight Frame)。

1．2．2 分形研究中常用的几个小波

1．Daubechies 紧支撑正交小波（基）[89],[117]

具有紧支集的正交小波基在数字信号的小波分解过程中可以提供有限长度的更实际、更具体的数字滤波器，而且，它和 Haar 小波（仅有一阶消失矩）等相比，Daubechies 连续的紧支集正交小波可以有任意高阶消失矩。对于L阶消失矩的小波，其滤波器h_n的长度$N=2L$，并且$L-1$次连续可导。

由 MRA 理论可知，尺度函数和小波函数均满足双尺度方程：

$$\phi(x)=\sqrt{2}\sum_{n\in Z}h_n\phi(2x-n)$$

$$\psi(x)=\sqrt{2}\sum_{n\in Z}(-1)^n h_{-n+1}\phi(2x-n)$$

为了保证紧支性，就必须上式右边含有有限项，作适当的平移变换，上面两式就可写成

$$\phi(x)=\sqrt{2}\sum_{n=0}^{N}h_n\phi(2x-n)$$

$$\psi(x)=\sqrt{2}\sum_{n=1-N}^{N}g_n\phi(2x-n)$$

构造上式中紧支$\phi(x)$（等价与寻找特征多项式$H(z)=\frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{n=0}^{N}h_n z^n$），其方法可归结如下几个步骤：

（1）选定一正整数$L\geq 2$.

（2）选定一多项式R，使它满足下面三个表达式

$$R\left(\frac{1}{2}-y\right)=-R\left(\frac{1}{2}+y\right)$$

$$P_L(y)+y^L R\left(\frac{1}{2}-y\right)\geq 0,\qquad 0\leq y\leq 1$$

其中$P_L(y)$满足

$$P_L(y)=\sum_{j=0}^{L-1}\binom{L-1+j}{j}y^j.$$

（3）寻找一实系数多项式$Q(z)$，使得$|Q(z)|^2=P_L(z)+z^L R\left(\frac{1}{2}-z\right)$.

（4）则得$H(z)=\left(\frac{1+z}{2}\right)^L Q(z)$.

2．Morlet 小波

Morlet 等人利用 Gauss 函数进行移位展缩，定义了如下的 Morlet 小波函数

$$\hat{\psi}_K(\omega)=e^{-(\omega-K)^2/2}-e^{-K^2/4}e^{-\omega K^2/4},\quad \forall K\in R$$

满足$\hat{\psi}_K(0)=0$，其 Fourier 逆变换就是满足容许条件的小波

$$\psi_K(x)=e^{iKx}\left(e^{-t^2/2}-\sqrt{2}e^{-K^2/4}e^{-x^2}\right)$$

在上述小波解析式中，当K取得充分大时，第二项可以省略掉。

3．Mexican 帽子小波

帽子小波是 Gauss 函数的第二阶导数，不仅具有无穷阶光滑性，而且具有指数衰减率。

$$\psi(x)=\left(1-x^2\right)e^{-x^2/2},\quad \hat{\psi}(\omega)=\omega^2 e^{-\omega^2/2},\quad \hat{\psi}(0)=0$$

这种满足容许条件的解析小波具有时域和频域良好的局部性质，常被用来研究分形的局部性质。

1．2．3 小波在分形研究中的应用

小波理论中的多分辨分析思想，体现了人们认识和识别形体的过程遵循了一种从低分辨率到高分辨率的原理。对于分形的研究观察也正是这样的方式。从大到小的不同尺度变换，在越来越小的尺码上观察越来越丰富的分形细节问题。小波分析和分形具有深刻的内在联系，两者在尺度变换上具有一致性,分形是一种几何语言，而小波是一种分析局域奇异性的工具，两者相得益彰。

与此同时，小波在信号处理、图象边缘检测等[55],[63],[65]领域中的广泛应用为小波在分形领域的应用提供了方法和经验方面的借鉴。

小波在以往分形研究中的应用主要在以下几个方面进行。

1. 在分形反问题方面的应用：

在分形反问题研究中，1993 年 A.Arneodo 首先利用小波对一维饼格(Cookie-Cutters)进行了分析获得成功，从而开创了小波在这一方向应用的先河，奠定了分形反演的理论基础。随后 A.Arneodo 等[93]人的方法又在 DLA 角向集的研究中发现了存在着 Fibonacci 结构。小波处理反问题的关键是特征点的选择问题。后来的人们几乎均是围绕着这一思想展开的。Arneodo 最初选择小波变换初始极大值点作为特征点，而 Z.R.Struzik[94]则选择小波极值分岔点为特征点，我国学者朱治军和李后强[26],[33]选取最末极大值点作为特征点，其计算量要较前两种少，并可在较大的尺度上进行判断。

2. 在各种类型分形结构分析中的应用：

分形的典型性质是在小标度下表现出某种自相似性。局部自相似性也就意味着分形测度 μ 在点 x_0 附近的标度变化满足下式：

$$\mu(B(x_0,\lambda\varepsilon)) \sim \lambda^{\alpha(x_0)}\mu(B(x_0,\varepsilon))$$

其中 $B(x_0,\varepsilon)$ 是中心在 x_0 半径为 ε 的球，$\alpha(x_0)$ 是局部标度指数（或局部 *Hölder* 指数）。为了研究其局部奇异性，因此小波可被用来分析分形的测度。

当 $\lambda \to 0$ 时，其标度特征为：

$$W_\psi(\lambda a, x_0+\lambda b) \sim \lambda^{\alpha(x_0)} W_\psi(a, x_0+b)$$

这表明了分形测度μ具有相同指数$\alpha(x_0)$。

这方面的工作主要包括有均匀和非均匀 Cantor 集的小波变换、 A.Arneodo 等人对受限扩散凝聚模型 DLA(The Diffusion-Limited Aggregation) 的小波变换、单标度和双标度雪花模型的小波变换等[48]。

3. 在随机分形分数布朗运动（或者$1/f$过程）方面的小波分析研究：

分数 Brown 运动 FBM(Fractional Brownian Motion)是一个非平稳的具有零均值的 Gauss 随机函数[109],[113],[114]，在描述自然界和社会经济生活中发生的许多事件现象（诸如电子元器件中的噪音、Internet 网络流量、股票价格的涨落等）[34],[35]方面发挥着重要的作用。其定义如下：

$$B_H(0)=0$$

$$B_H(t)-B_H(0)=\frac{1}{\Gamma(H+0.5)}\left\{\int_{-\infty}^{0}\left[(t-s)^{H-1/2}-(-s)^{H-1/2}\right]dB(s)+\int_{0}^{t}(t-s)^{H-1/2}dB(s)\right.$$

其中$B(t)$是通常的 Brown 运动，$0<H<1$。当$H=\frac{1}{2}$时，FBM 就是 Brown 运动。

主要是利用分数布朗运动函数$B_H(t)$的小波变换结果分析该随机过程具有的统计自相似特征。最早利用小波方法的是 Minnesota 大学的 A.H.Tewfik[112]，他 1991 年发现在不同变换尺度上离散小波系数具有相关性， 系数自相关和互相关函数按抛物线以比自身自相关还要快的数率衰减， 衰减率主要受控于分析小波消失矩的大小。几乎在同一年，法国 Lyon 物理研究所的 Patrick Flandrin[101] 研究了 FBM 模型的小波合成问题。国内华中理工大学的王晓军等人[45]在离散 FBM 场理论的基础上阐述了分形小波多分辨图像识别的概念，提出了一种高效快速的识别算法。

另一方面，从频域的角度看，上述所列各类客观现象频谱呈现一种$1/f$规律。$1/f$过程是一种非平稳过程， 是通过带通滤波后表现出来的统计自相似过程， 因其功率谱具有如下特点而得名。

$$S_x(\omega)\propto\frac{1}{|\omega|^{\gamma}}\ ,\qquad \gamma=2H+1$$

G.Wornell 先后在 1990 年至 1995 年期间发表数篇论文和专著[101],[111]，就$1/f$过程的小波表示和合成、小波系数相关性等问题做了大量的研究工作，得出小波变换对自相似过程具有好强的去相关作用 结论：小波系数的相关性系数随着采样间隔增大而衰减的速度要远快于分形函数本身自相关函数随采样间隔增大而衰减的速度。

除此而外，在分形其他方面，还有一些涉及小波的比较零散的研究。譬如，小波分形编码[57]、Mallat 和 Hwang 有关分形信号奇异性的小波极大值方法等。

总的说来，由于小波从诞生到现在不过十几年的时间,其本身经历了一个不断发展和完善的过程，是现代调和分析的一个重要发展和突破，已经有了坚实的理论基础和广袤的应用土壤，已经为人们所接受。而分形理论和小波相比虽然起步比较早，但因其“离经叛道”的反常性和独立性不易为大多数的人们所接受，况且本身的理论基础尚建立得不够牢固，发展研究因此就相对显得碎步慢行。小波分析工具开始进入分形研究领域至今则短短不到十年的时间，取得了一些可喜的成果，但分形理论中有许多存在的问题，还有待借助包括小波分析工具在内的手段和方法去解决。可以确信，小波的引入犹如催化剂增添了分形研究的青春活力，这是黎明到来的一丝曙光。基于这一理念和思路，本文利用小波分析工具就分形理论有关问题进行了探讨，取得了一些比较满意的结果。

1.3 本文的主要工作和创新

1. 分析了分形曲线维数的传统计算方法及其缺陷，提出了多分维分形曲线的模式。基于小波阈值去噪方法，给出曲线上点的局部分形维数的计算公式及算法。仿真计算结果及图示均表明该法是有效的。

自从 1872 年 Weierstrass 引入特殊的 Weierstrass 函数以来, 到现在人们有了分形概念后已经发现这类无处可微且连续的函数是广泛存在的。后来 Hardy 和 Kaplan 分别在 1916 年和 1984 年先后就 Weierstrass 函数的（盒）维数问题展开了研究，探讨各类分形曲线维数的计算一直是分形几何学的研究热点之一。目前有关分形曲线维数的计算主要有量规方法和周长面积法两种常用方法，它们共同的特点是，用代表分形曲线整体、平均的单一维数来定量地刻画曲线的分形特征。本人认为，其主要缺点体现在以下两方面：一是在忽略细微结构的不同的情况下，计算出的分维数客观上是一种比较粗略的近似结果。Hausdorff 维数对不同的测量尺码 δ 是一个较敏感的参数，稳定性的丢失意味着维数参量原本价值也就无法体现出来；二是实际测量的数据要受到各种各样的污染，由此会增大或者减小维数的估计值，同时在光滑去噪的人为操作下很显然也会减小维数估值。为此，我们有必要引入多分维曲线模式反映分形曲线的局部分维特征，这也就意味着曲线上有了“点的维数”概念。在定量刻画分维方面，我们采用小波阈值去噪方法（非光滑方法）把分形函数从噪音数据中分离出来，通过收敛性的理论证明，可以有效地保留其分形维数，仿真算例结果也验证了方法的有效性。同时，我们也得到了基于小波去噪处理后的分形曲线维数计算式，并可很自然地应用于局部化维数的计算。

$f(x)$在x_0处的$U(x_0,\delta)$邻域内的局部分维数$\dim(f,x_0)$满足：

$$\frac{3}{2}+\frac{1}{j_n}\log_2^{\left(\sum_k\left|\delta_{j_n}(y_{j_n},k)\right|\right)}\to\dim(f,x_0),\quad (n\to\infty)$$

详见第二章。

2．基于小波变换在零点具有的的保相似形特征，在已知分形插值函数图象情况下，从有限数目个零点出发，给出寻找一组仿射压缩变换使该函数图象成为未知迭代函数系统吸引子的一种构造方法。

分形反问题由于在图象压缩技术中有着重要的作用而成为目前分形研究中的前沿课题之一。其核心内容是寻找由仿射变换组成的迭代函数系统，当前求解反问题方法依据包括有拼贴定理、矩量法和小波变换三种。和后一种相比，前两种都涉及复杂的方程优化问题，运算量大且稳定性差。对于分形反问题的小波分析，可归结为一类特征点尺度关系的确定。特征点的选择依据是：一是要能够完整地描述整个分形内蕴的不变性；二是计算量应尽可能小。Mallat[65]在1992年证明了大多数函数的小波变换模极大值表示可以完整表达，计算量的减少是明显的。基于这一结论，A.Arneodo等人1994年选择了小波变换初始极大值分岔点作为特征点，Z.R.Struzik 1995年则取小波变换极值分岔点为特征点，朱治军、李后强1997年则取最末极大值点为特征点。后者和前两人的方法相比更具有计算量小且可在较大尺度下对点做出判断的优点。我们的方法则是选择函数小波变换零点作为反演时的特征点，处理的对象简化为分形插值函数图形，立论的依据有以下三条：

（1） Logan[107]在1977年就曾证明了，对窄带信号而言，用信号本身的过零点可以完整地表征信号。小波本来就是带通函数。由定理可知，此时通过$WT_{2^j}x(t)$的所有零点途径，必然可以恢复到$WT_{2^j}x(t)$。又因为小波变换是可逆的，这样必然达到恢复$x(t)$的目的。

（2） 一个可微小波ψ的导函数ψ'依然是一个小波，且有等式成立：

$$\frac{\partial W_\psi[f]}{\partial b}(a,b)=-\frac{1}{a}W_{\psi'}[f](a,b)$$

$W_\psi[f]$的模极大值点也就是$W_{\psi'}[f]$的某些零点，也就是说，选零点为特征点和以前选法依然能够获得一样平等的地位。

（3）Barnsley[106]也已证明过，分形插值函数是定义于紧区间上的自仿射函数，是迭代函数系的唯一吸引子，是产生分形图形的重要构造方法。

文中证明了小波变换零点处的保相似性特征，给出了分形插值函数反演的解及算法，算例验证该算法的有效性。

详见第三章。

3．提出了分形时变维数的概念，将其引入两类具有局部自相似性的有偏随机过程中。借助小波基固有的尺度特性很适合分析非平稳性和局部自相似性这一特点，给出 Hurst 指数的小波估算公式及算法，证明了小波估算值$\hat{H}(t)$和真实值$H(t)$是相容的，并用仿真结果加以验证，同时对上海股票市场月指数变化进行了实证分析。

为了揭示自然界中一大类不规则形体的标度不变性，一方面人们发明了各种各样的分形维数（由标度关系推出的一些确定的量值）用来反映分形对象的自相似构造规律；另一方面人们在研究自相似性时又总是假定维数是一个常数，忽略了分形体在一维时间世界的演化常会导致自相似性的改变。为了能刻画时间序列分形的时空动力学演化过程，有必要引入时变维数$D(t)$概念。又由于平面空间中分数布朗运动(FBM)中的 Hurst 指数和相关分维数存在着$D=2-H$这一数量关系，因此我们就选取分数布朗运动和分整自回归滑动平均模型(ARFIM)作为突破口，把传统的两类模型拓展为下面两式：

$$Y(t)=\int_{-\infty}^{0}\left[(t-u)^{H(t)-1/2}-(-u)^{H(t)-1/2}\right]dB(u)+\int_{0}^{t}(t-u)^{H(t)-1/2}dB(u)$$

$$(1-\Phi(B))(1-B)^{H(t)-1/2}X(t)=(1-\Theta(B))\varepsilon(t)$$

此时$D(t)=2-H(t)$，当$H(t)=1/2$时，就是一般的 FBM 和 ARFIM 两种模型。

对于上述具有局部自相似性的随机过程，我们利用 Daubechies 小波建立了随机变量连续小波变换平方与小波变换尺度之间的一个局部对数线性关系式，通过最小二乘法得到$H(t)$的估计$\hat{H}(t)$，并在数学上得到有关$\hat{H}(t)$和$H(t)$的两个极限表达式（相容性结果）：

$$E\{\hat{H}(t)\}\to H(t),\qquad Var\{\hat{H}(t)\}\to 0\ ,\qquad (L\to 0)$$

提出了实现这一过程的算法，算例结果也显示该算法是有效的。另外，对上海股市的实证分析，对于投资策略决策有着重要的指导意义。同时，我们相信，在目前金融工程的未来研究发展中，这一概念及其小波分析方法的价值将会愈来愈快地体现出来。

详见第四章。

4. 借助小波变换对自相似过程所起的白化作用和最小二乘法，建立了无须知道 $1/f$ 过程中参数分布的谱参数估计方法。

$1/f$ 过程在生产与生活中是一类很常见的统计自相似随机过程。其分维谱特性满足下式：

$$S_x(\omega) \propto 1/|\omega|^{\gamma}, \qquad \gamma = 2H + 1$$

以前人们在时间域中采用 ARMA 和 FBM 两个模型基本上均能很好地表达这一随机过程，但其处理方法较为复杂，对于 γ 的选择也不近人意。由于该过程表现出的非平稳性，G.Wornell[115] 在 1992 年首次给出了刻画 $1/f$ 过程的小波模型，并提出了用极大似然估计方法估算 $1/f$ 过程谱参数 γ 的途径。但这种方法要求人们知道该过程的概率分布函数，应用起来会带来有关分布的假设成份。为了客观地估计参数 γ 值，通过对 $1/f$ 过程的小波变换系数之间在相关结构上的特点以及小波消失矩对系数相关性衰减性的影响两方面的研究，我们给出了基于小波系数方差结构的谱参数 γ 估算最小二乘法，并用仿真对方法的有效性进行验证，取得较为满意的结果。

详见第五章。

5. 提出在最优尺度上跟踪小波模极大值线的参数方法，为研究多分形谱奇异性提供了一种途径。探讨了分形测度小波变换极大值线的拓扑分岔情况，并提出了一种基于小波变换模极大值的多重分形谱估算方法。

多重分形是是定义在分形上的、由多个标度指数的奇异测度所组成的集合，主要研究分形测度在分形支集上的分布情况——多分形分维谱。要完整地刻画有关局部分维 α 在空间分布的信息 $f(\alpha)$，小波方法是分析多分形局域结构的有效工具。Mallat 和 Hwang[65] 1992 年开创了利用小波模极大值来分析分形信号局部奇异性行为的先河，该法中的局部极大值点（在某一尺度级水平上形成极大值线）是在离散尺度上进行计算的，要涉及大量的数值运算及拓扑问题，特别是对于分形中非孤立的突变点，在跟踪时就会不知所措。在研究多分形谱的过程中，跟踪失效也就意味着分形局部细节信息的丢失，不利于谱维数计算结果的真实性，这是分形信号与一般信号的不同之处。

本文假定小波变换是一个连续变换，在一个最好尺度上所有极大值点都可以得到确定，而每一个极大值点均可以看成一条极大值线的起始点。为此，文中选择具有 n 阶消失矩及良好局域性的 Gauss 函数作为母小波，把小波变换中的两个变换因子 a 和 b 看成是参数 t 的函数 $a(t)$、$b(t)$，这样沿某条极大值线极大值点运动的轨迹可由下面的一个偏微分方程决定：

$$\frac{d}{dt}\left(W_b^n\mu\right)=W_{ba}^n\mu\frac{da}{dt}+W_{b^2}^n\mu\frac{db}{dt}=0$$

在$W_b^n\mu=0$的前提下，理论上可用 Runge Kutta 方法求解上述方程 。

在有极大值线分岔点或极大值点邻近比较平滑的情况下， Mallat 方法及上述的参数跟踪算法就没有明显的效果。文中选取了小波变换在分岔点邻域内 Taylor 级数展开中的两个多项式函数作为 GS 范式中的芽函数， 探讨了这类奇异点附近极大值线的走向情况。

小波模极大值线结构包含了多分形分形测度奇异性的必要信息，但由于分形的奇异点是非孤立的， 要计算每一点态奇异指数$\alpha(x_0)$是很困难的。 文中提出了一个基于小波变换模极大值的广义q次信息量维数概念，然后通过多重分形语言转化式完成对多重分形谱的计算。这一过程中，对于小于尺度a的所有尺度下每一个极大值点处的小波变换模极大值采用沿极大值线的上确界代替，这是解决非孤立点附近奇异性度量问题的关键步骤。

详见第六章。

第二章 多分维分形曲线维数计算的小波方法

2.1 引 言

分形曲线是目前分形几何学中的研究热点之一，其研究成果也相当丰富。有关分形曲线的研究可以追溯到 Weierstrass1872 年当时引入的无处可微连续函数：

$$W_{\lambda,s}(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\lambda^n\cos(s^n\pi x)\quad,\qquad 0<\lambda<1$$

他曾证明了当s是奇数时，$\lambda s>1+\frac{3}{2}\pi$，则对任意$x\in[0,1]$，$W_{\lambda,s}(x)$在该点不存在（有限或无限）的导数。而 1916 年 Hardy 则又证明了，只要$\lambda s\geq 1$，则在任何一点$W_{\lambda,s}(x)$均没有有限的导数。在分形概念提出以后，其实我们可以看到无处可微连续函数是广泛存在的，于是人们转而将$W_{\lambda,s}(x)$函数作为一个具有分形特征的函数加以研究，集中探讨了函数图象的维数问题。

若以$\Gamma(W)$表示$W_{\lambda,s}(x)$的图象，在$\lambda s>1$的条件下，Hardy 在 1916 年证明了其盒子维数满足的一个结论：

$$\dim\Gamma(W)\leq 2+\frac{\log\lambda}{\log s}$$

随后 1984 年 Kapian 证明了：

$$\dim\Gamma(W)=2+\frac{\log\lambda}{\log s}$$

设分形曲线 C 是连续映射f的象，$f:I\rightarrow\Re^n$。有关一般分形曲线维数的计算，现阶段主要有以下两种方法。

第一种方法：量规方法

设f是连续的双射，显然C是一个无自交点的 Jordan 曲线，分形曲线的各类长度公式具有下列关系式：

$$L_E=L_{OE}\cdot\delta^{1-D}$$
$$L_E=L_H\cdot\delta^{1-D}$$
$$L_H=L_O{}^D\cdot\delta^{1-D}$$

由此可以推出：
$$D=1-\log\left(L_E/L_{OE}\right)\Big/\log\varepsilon\,,\qquad\cdots\cdots(2.1.1)$$

其中L_E表示C的欧几里德长度，L_{OE}表示I的欧几里德距离，L_H表示C的 Hausdorff 长度，D是曲线C的维数，ε为标度，δ为码尺，而且有：

$$\delta=\varepsilon\cdot L_{OE}\quad,\qquad\cdots\cdots(2,1,2)$$

将上式代入(2.1.1)式，可得到下面的维数计算公式：

$$D=\log\left(L_E/\delta\right)\Big/\log\left(L_{OE}/\delta\right) \qquad \cdots\cdots(2,1,3)$$

令 $L_{OE}=L_E$，可以看成两脚间距离为 δ 的两规脚所测曲线 C 的长度。这样 L_E/δ 实际上就是以 δ 为步长测得的步数 $N(\delta)$。

(2,1,3)式就可以改写为：

$$D=-\log N(\delta)\Big/\log\delta$$

这一维数叫量规维数。在双对数坐标系中拟合数据集 $\left[\log\delta,\log^{N(\delta)}\right]$ 所得直线斜率就是 D。Okubo 等人[36]采用这一方法在 $\delta=1-15$ 之间测得圣安德烈斯断层分维 $D=1.31\pm0.02$。中国学者李后强等人[12]利用此法计算几种肌红蛋白蛋白质分子链的 Hausdorff 维数，取得了一定成果。但这种方法难免忽略了蛋白质内部结构的细节问题，只能是提供定性参考数据。

第二种方法：周长面积法

对于封闭曲线 C，可以用 C 的周长和 C 所围区域面积 A 来计算分维 D，亦叫小岛法。

当 P_E 是曲线 C 的欧几里德长度时，有下式成立：

$$P_E^{1/D}=a_0\delta^{(1-D)/D}\cdot A^{1/2}\ , \qquad \cdots\cdots(2,1,4)$$

其中 δ 是码尺，a_0 为无量刚的常数。

设 P_H 为曲线 C 的 Hausdorff 长度，则有：$P_H^{1/D}=a_0A^{1/2}$

由(2,1,4)式可以推出维数的计算公式：

$$D=\log\left(P_E/\delta\right)\Big/\left[\log a_0+\log\left(A^{1/2}/\delta\right)\right] \qquad \cdots\cdots(2,1,5)$$

若研究对象是一个几何图形，取不同码尺 $\delta_i\ (i=1,2,\cdots,n)$ 测定曲线 C 周长值 P_{E_i} 和面积值 A_i，然后对 $\left[\log A_i^{1/2}\Big/\delta_i,\log\left(P_{E_i}\Big/\delta_i\right)\right]$ 进行线性回归即可求出 D 值。在这里 a_0 和 D 均假定是常数。此法在金属断裂韧性的研究中发挥了作用[49]。

若要计算 K 个几何图形周界整体的维数，则要对每个几何图形按上述方法测量，数据按照(2,1,5)式回归出 D_i，取 K 个图形分维 D_i 的算术平均值作为整体维数 D。则有：

$$D=\frac{1}{K}\sum_{i=1}^{K}D_i$$

综上所述，对于一条分形曲线C，用代表曲线C整体、平均的单一维数来刻画曲线的分形特征是上面两种方法的特点。的确，维数的本质是集合层次的一种量值标号，但就实际中的蛋白质分子链而言，由于其分子结构的复杂性，要精确地刻画其分形特征，迫切需要研究其局域分维D_L。在这种情况下，以往的计算方法就显得不太适应，其缺点主要体现在：一是在忽略细微结构的不同的情况下计算出的分维数客观上是一种比较粗略的近似结果。不同的尺码δ，计算得到的分维数是一个较敏感的参数，稳定性的丢失则意味维数参量原本价值无法体现出来。几类蛋白质分子链的分维测定结果表明了这一点[12]；二是实际中测量的数据是受到各种污染的数据，这种污染“噪声”会增大或减小分形维数的估计值[42]，并且对噪音数据的光滑也会减小分形维数。基于以上两方面的原因，我们需要一个多分维分形曲线的模型及一种新的计算方法，应该具有解决上述所存在问题的两个优点：其一是它能够很好地反映分形曲线的局部分维特征，即意味着由点到点的“分形指数”各不相同；其二它不仅能够对测量数据进行去噪，把分形函数从加噪音数据中分离出来，而且能够有效地保留其分形维数，尽可能地克服平滑性。显然，带有平滑性质的去噪方法是不能用的。

为了解决这个多分维分形曲线的维数问题，我们引入基于小波加阈去噪的方法。

本章主要工作安排如下：在第二节和第三节，对所涉及的盒子维数及相关小波方面的知识加以回顾。然后在第四节，基于小波加阈去噪方法，我们给出分形曲线局部维数的一种小波估算方法。在最后一节，用仿真例子对该方法加以验证。

2.2 盒子维数的定义和计算

合维数(Box Dimension)是应用最广泛的维数之一，主要是由于其数学估算和经验估计相对其它分形维数来说容易一些。通常情况下，曲线越粗啁，那它的分形维数就越大。

假定$G=\{(x,f(x))|x\in[0,1]\}\subset\Re^2$是定义于$[0,1]$上的函数$f(x)$的图象。对于$\varepsilon>0$，$B(z,\varepsilon)$代表以$z$为中心、半径为$\varepsilon$的圆，$N_\varepsilon(G)$是覆盖$G$的圆$B(z,\varepsilon)$的最小数目，$L_\varepsilon(G)$为$\varepsilon$_ Minkowski 香肠$G(\varepsilon)$的 Lebegue 测度。

$$G(\varepsilon)=\bigcup_{z\in G}B(z,\varepsilon)$$

$f(x)$的分形维可以定义为

$$\dim(f)=\lim_{\varepsilon\to0}\log N_\varepsilon(G)\Big/|\log\varepsilon|=\lim_{\varepsilon\to0}\left(2-\log L\{G(\varepsilon)\}\Big/\log\varepsilon\right),\qquad\cdots\cdots(2,2,1)$$

在上式中$N_\varepsilon(G)$和$L\{G(\varepsilon)\}$直接分析较为困难，转而采用$f(x)$的变差来求其

分形维。

定义$f(x)$的$\varepsilon-$振荡为：

$$Osc_{\varepsilon}(x)=Sup\{f(x_1)-f(x_2)\|x_1,x_2\in[x-\varepsilon,x+\varepsilon]\bigcap[0,1]$$

定义$\varepsilon-$变差为：$V(\varepsilon)=\int_0^1 Osc_{\varepsilon}(x)dx$

于是$f(x)$的维数就可以写成下式[104]：

$$\dim(f(x))=\lim_{\varepsilon\to 0}\left(2-\log\{V(\varepsilon)\}\Big/\log\varepsilon\right), \qquad \cdots\cdots(2,2,2)$$

若$(2,2,1)$和$(2,2,2)$两式中的极限不存在，我们可以用上极限、下极限替代。

另外的一种计算途径和*Hölder*指数有关。设是C一个正常数，$f(x)$满足指数α的*Hölder*条件：

$$|f(x_1)-f(x_2)|\le C|x_1-x_2|^{\alpha}, \qquad \cdots\cdots(2,2,3)$$

结合$(2,2,2)$式，可以推出$\dim(f(x))\le 2-\alpha$

另一方面，若存在一个正整数$p\ge 1$，$C>0$，使得对于小的正数$h>0$，有下式成立：

$$\left(\int_h^{1-h}|f(x+h)-f(x-h)|^p dx\right)^{1/p}\ge Ch^{\alpha}, \qquad \cdots\cdots(2,2,4)$$

这也表明[104] $\dim(f(x))\ge 2-\alpha$.

上述$(2,2,3)$和$(2,2,4)$两式可以把$\dim(f(x))$和*Hölder*指数联系在一起，并且确保$f(x)$的维数$\dim(f(x))=2-\alpha$.

$f(x)$在x_0处的局域维数定义为：

$$\dim(f(x),x_0)=\lim_{\varepsilon\to 0}\dim\{G\bigcap B(x_0,\varepsilon)$$

当给定有限的数据集时，也可以计算维数。不妨设ε为一条分形曲线的度量，并定义$Q(\varepsilon)=V(\varepsilon)\Big/\varepsilon^2$（$V(\varepsilon)$为曲线的方差），让尺度$\varepsilon_i(i=1,2,\cdots,n)$不断变小，计算数据对集$(|\log\varepsilon_i|,\log\{Q(\varepsilon_i)\})$，然后求出回归直线斜率即为分形维数。

2.3 与维数计算有关的小波分析

设$\psi(x)$是一个具有紧支撑的 Daubechies 小波

$$\psi_{j,k}(x)=2^{j/2}\psi(2^j x-k), \qquad j,k\in Z$$

其中j,k分别是2^{-j}尺度和$k2^{-j}$位置的多分辨指标值。对于$f(x)\in L^2(\Re)$，则

有：

$$f(x)=\sum_{j,k}c_{j,k}\psi_{j,k}(x),\qquad c_{j,k}=\int f(x)\psi_{j,k}(x)dx$$

对支撑于$[0,1]$的函数$f(x)$，选择指标集$\{(j,k),j=0,1,\cdots,k=0,1,\cdots,2^j-1$，并对于$\psi_{j,k}(x)$做一些限制，使得$\psi_{j,k}(x)$成为一个完备区间正交基。

设$D=S_{2}^{d_0}f(n)\,(n\in N)$为曲线$f(x)$的离散采样序列，$W_{2^j}^{d}f(n)\,(n\in N)$为$D$在每一尺度$j$上的小波变换值，$S_{2^j}^{d}f(n)\,(n\in N)$为$D$在尺度$j$上的近似。小波快速算法是在每一尺度$j$上把$S_{2^j}^{d}f$分解为下一尺度的$S_{2^{j+1}}^{d}f$和$W_{2^{j+1}}^{d}f$

$$S_{2^{j+1}}^{d}f=S_{2^j}^{d}f*h_j,\qquad W_{2^{j+1}}^{d}f=S_{2^j}^{d}f*g_j,\qquad j=0,1,\cdots,J-1$$

其中J为最佳尺度，h_j，g_j表示尺度函数$\varphi(x)$和小波函数$\psi(x)$相对应的滤波器。小波快速重构算法则是下面的表达式：

$$S_{2^j}^{d}f=S_{2^{j+1}}^{d}f*\bar{h}_j+W_{2^{j+1}}^{d}f*\bar{g}_j,\quad j=0,1,\cdots,J-1。\qquad\cdots\cdots(2,3,2)$$

基于小波系数$c_{j,k}$的衰减估计，有利于估计$f(x)$的光滑度。

定理 2.2.1 若一个有界函数$f(x)$是*Hölder*连续的，$0<\alpha\le 1$

$$|f(x)-f(y)|\le C|x-y|^{\alpha}$$

那么$f(x)$的小波变换系数满足$|c_{j,k}|\le C'2^{-j(\alpha+1/2)}$，$\qquad\cdots\cdots(2,3,1)$

证明如下：　由于$\int\psi(x)dx=0$，于是有

$$|c_{j,k}|=\left|\int 2^{-j/2}\psi(2^jx-k)[f(x)-f(k)]dx\right|\le\int 2^{-j/2}|\psi(2^jx-k)|C|x-k|^{\alpha}dx$$

$$\le C2^{-j(\alpha+1/2)}\int|\psi(y)||y|^{\alpha}dy$$

$$\le C'2^{-j(\alpha+1/2)},$$

另一方面，我们又有以下的定理[ ]：若是$\psi(x)$紧支小波，$f(x)$是有界连续函数。对于某$\alpha\in(0,1)$，$|c_{j,k}|\le C2^{-j(\alpha+1/2)}$，那么$f(x)$是指数$\alpha$-*Hölder*连续的。

结合$(2,2,2)$式，由 1994 年 Massopust[85]所推的结果，可知$f(x)$的小波系数可被用来计算曲线的维数：

$$\dim(f(x)) = 3/2 + \lim_{j\to\infty} \log\left(\sum_k |c_{j,k}|\right) \Big/ j \quad , \qquad \cdots\cdots(2,3,3)$$

该结果是在没有考虑数据受到"污染"的情况下得出的。

2.4 基于小波去噪的分形维数估算方法

2．4．1 分形曲线的小波加阈去噪处理

利用小波变换进行去噪及重构一直是一个热门话题。1992 年 Mallat 研究了奇异信号及噪声在小波变换各尺度空间中模极大值的不同传播特性。该方法经过对模极大值处理之后，存在一个由剩余模极大值重构小波系数的问题，计算比较复杂，对原有曲线有一定平滑作用[65]。另一种小波去噪方法[102],[120]是直接对信号的小波系数采用软（或硬）阈值方法进行"过滤"，计算量小，方法较简洁，同时也不会过分地改变曲线的光滑度，所以适宜于处理分形曲线。

假设数据 $y_1, y_2, \cdots, y_n$ 是从下面的非参数回归模型获得的

$$y_i = f(x_i) + \varepsilon_i \quad , \qquad i = 1,2,\cdots 2^N \quad , \qquad \cdots\cdots(2,4,1)$$

其中 $x_i = i/n \in [0,1]$，$\varepsilon_i \sim N(0,\sigma^2)$ 是方差为 σ^2 的高斯随机噪音，$f(x)$ 是定义于 $[0,1]$ 上的未知待定的函数。

在去噪过程中获得估值 $\hat{f}(x)$ 的算法如下：

步骤 1：利用上节所述的 Daubechies 紧支小波滤波算法来处理观测数据 y_i 获得经验小波系数 $y_{j,k}$，　$j = 0,1,\cdots,N-1$，　$k = 0,1,\cdots,2^j - 1$

步骤 2：通过下面的软阈规则对经验小波系数 $y_{j,k}$ 进行加限处理得到 $\delta_{t_n}(y_{j,k})$。

$$\delta_{t_n}(y_{j,k}) = \begin{cases} sign(y_{j,k})(|y_{j,k}| - t_n) & |y_{j,k}| \ge t_n \\ 0 & |y_{j,k}| < t_n \end{cases}$$

其中 $t_n = \sigma/\sqrt{n}\,\sqrt{2\log(n)}$ 。

步骤 3：由加限经验小波系数 $\delta_{t_n}(y_{j,k})$ 通过 $(2,3,2)$ 式重构获得 $f(x_i)$ 的小波估

计值$\hat{f}(x_i)$。

可以看出，选取一个阈值t_n后，把低于t_n的小波系数$y_{j,k}$（这部分主要由噪音ε_i引起）设为零，而高于t_n的小波系数$y_{j,k}$（主要由$f(x_i)$引起的）经过处理后的$\delta_{t_n}(y_{j,k})$，就可基本上理解为是由$f(x_i)$引起的，进而得到一个估计$\hat{f}(x_i)$。

2．4．2 多维分形曲线局部维数的计算

在(2,3,3)式成立的条件下，我们考察$f(x)$在x_0处的邻域$U(x_0,\delta)$内的情况得到$f(x)$去噪后的一个局部化维数结论：

当$n\to\infty$时，在概率意义上

$$\frac{3}{2}+\frac{1}{j_n}\log\left(\sum_K\left|\delta_{t_n}(y_{j,k})\right|\right)\to\dim(f(x),x_0), \qquad \cdots\cdots(2,4,2)$$

其中$j_n\le J_n$，当$n\to\infty$时，$j_n\to\infty$，$J_n=\log_2^{(n)}\Big/\{5-2\dim(f,x_0)+\eta\}$，$\eta$为某一正数，$j=0,1,\cdots,J,k=0,1,\cdots,2^J-1$。

证明如下：

设 $y_{j,k}=c_{j,k}+\frac{1}{\sqrt{n}}\varepsilon_{j,k}$，$j=0,1,\cdots,J$，$k=0,1,\cdots,2^j-1$。 ……(2,4,3)

其中$y_{j,k},c_{j,k},\varepsilon_{j,k}$分别是$y_i,f(x_i),\varepsilon_i$的经验小波系数。

此时，加限小波系数$\delta_{t_n}(y_{j,k})$满足：

$$\sum_k\left|y_{j,k}\right|\ge\sum_k\left|\delta_{t_n}(y_{j,k})\right|\ge\sum_k\left|y_{j,k}\right|-2^j t_n, \quad \cdots\cdots(2,4,4)$$

ε_i是零均值、方差为σ^2的独立正态随机变量，而小波变换是正交的，所以$\varepsilon_{j,k}$也是零均值、方差为σ^2的独立正态分布。

Chebyshev 不等式表明：$\sum_{k=1}^{2^{j_n}}\left|\varepsilon_{j_n,k}\right|$为一个$2^{j_n}$次多项式

当$n\to\infty$时，现在考察(2,4,4)式两边：

$$\log_2\left(\sum_k\left|y_{j_n,k}\right|\right)=\log_2\left(\sum_k\left|c_{j_n,k}+\frac{1}{\sqrt{n}}\varepsilon_{j_n,k}\right|\right)$$

$$=\log_2\left\{\sum_k\left|c_{j_n,k}\right|+O_p\left(n^{-1/2}2^{j_n}\right)\right\}$$

$$=\log_2\left(\sum_k\left|c_{j_n,k}\right|\right)+\log_2\left\{1+O_p\left(n^{-1/2}2^{j_n}\Big/\sum_k\left|c_{j_n,k}\right|\right)\right\}$$

$$=\log_2\left(\sum_k\left|c_{j_n,k}\right|\right)+O_p\left(n^{-1/2}2^{j_n}\Big/\sum_k\left|c_{j_n,k}\right|\right),\quad\cdots\cdots(2,4,5)$$

同时有

$$\log_2\left(\sum_k\left|y_{j_n,k}\right|-2^{j_n}t_n\right)=\log_2\left\{\sum_k\left|c_{j_n,k}\right|+O_p\left(n^{-1/2}2^{j_n}\right)-2^{j_n}t_n\right\}$$

$$=\log_2\left(\sum_k\left|c_{j_n,k}\right|\right)+\log_2\left\{1+O_p\left((\log n)^{1/2}n^{-1/2}2^{j_n}\Big/\sum_k\left|c_{j_n,k}\right|\right)\right\}$$

$$=\log_2\left(\sum_k\left|c_{j_n,k}\right|\right)+O_p\left((\log n)^{1/2}n^{-1/2}2^{j_n}\Big/\sum_k\left|c_{j_n,k}\right|\right)\;,\qquad\cdots\cdots(2,4,6)$$

上面各式中的O_p均表示 Taylor 多项式展开。

再由(2,3,3)式得到： $2\dim(f)=3+2\lim\limits_{j_n\to\infty}\log_2\sum\limits_k\left|c_{j_n,k}\right|\Big/j_n$

$$\log_2\left(\sum_k\left|c_{j_n,k}\right|\right)^2=\left[2\dim(f)-3+\beta(n)\right]j_n$$

$$\sum_k\left|c_{j_n,k}\right|=2^{[2\dim(f)-3+\beta(n)]j_n/2},\quad\beta(n)\to0(n\to\infty)$$

于是有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(\log_2^n)^{1/2}n^{-1/2}2^{j_n}\Big/\sum_k\left|c_{j_n,k}\right|}{j_n}=\lim_{n\to\infty}\left\{\left(\log_2^n/j_n^{\,2}\right)^{1/2}\frac{n^{-1/2}2^{j_n}}{2^{[2\dim(f)-3+\beta(n)]j_n/2}}\right\}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left\{\left(\log_2^n\Big/j_n^{\,2}\right)^{1/2}n^{-1/2}2^{[5-2\dim(f)-\beta(n)]j_n/2}\right\}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left\{\left(\log_2^n\Big/j_n^{\,2}\right)^{1/2}2^{\{[5-2\dim(f)-\beta(n)]j_n-\log_2^n\}/2}\right\}\to0$$

将上式代入(2,4,5)、(2,4,6)两式，并利用(2,3,2)式结果我们可以得到下式：

$$\log_2\left(\sum\nolimits_k\left|y_{j_n,k}\right|\right)/j_n\to\dim(f)-\frac{3}{2},\qquad(\ n\to\infty\ )$$

$$\log_2\left(\sum\nolimits_k\left|y_{j_n,k}\right|-2^{j_n}t_n\right)/j_n\to\dim(f)-\frac{3}{2},\qquad(\ n\to\infty\ )$$

由(2,4,4)不等式关系，我们就可得到和(2,4,2)式类似的维数计算公式：

$$\frac{3}{2}+\log_2\left(\sum_k\left|\delta_{t_n}\left(y_{j_n,k}\right)\right|\right)\Big/ j_n \to \dim(f,x_0),\quad (n\to\infty)$$

以上结果可以说明以下几点：

（1）在无噪音情况下，在高分辨级水平上，小波系数可以刻画$f(x)$的局部细节特征，从而确定函数$f(x)$的维数。一旦随机噪音进入，则它在更高分辨级上左右小波系数$c_{j,k}$，使得$c_{j,k}$失真。对于满足指数$\alpha-Hölder$条件的$f(x)$，此时，当(2,3,4)式中的噪音项$n^{-1/2}\varepsilon_{j,k}$达$n^{-1/2}$阶数量级时，我们可以看到在更高分辨级上，$y_{j,k}$主要由$\varepsilon_{j,k}$控制，分形曲线$f(x)$更详细的特征也就难以很好地恢复起来。

（2）在相对较低的分辨级j_n水平上，$y_{j_n,k}$则主要由$c_{j_n,k}$控制。正象上述定理所证，对于所取较大的样本数n，$f(x)$的分形维数都几乎保留在分辨级j_n的小波系数$\delta_{t_n}\left(y_{j_n,k}\right)$中。

（3）通常情况下，采用光滑方法处理曲线$f(x)$后的维数估计值为 1，也就是说，用光滑办法恢复原函数的维数是不可能的。

（4）这种计算方法既可用于计算$f(x)$的整个曲线维数，也可以在x_0的邻域$U(x_0,\delta)$内进行样本点的采集，按照以上的算法及定理，从而得到$f(x)$在x_0处的局部维数估计值。另外，对于加阈处理后的复原$\hat{f}(x_i)$也可直接采用第二节末所述方法进行维数计算。

2.5 数值仿真算例

算例 1 选取 Gauss 随机过程中的一个样本轨道曲线作为分形曲线$f(x)$。假设随机过程用下式表达：

$$X(x)=X_0+\int_0^x (x-t)^{H(x)-1/2}dB_t,\qquad x\in[0,1]$$

其中X_0为一个标准正态随机变量，B_t为一个标准的 Brown 运动。

随着曲线上点变化而变化的自相似参量$H(x)$（其作用等同于维数）设定为一线性函数：$H(x)=0.2+0.7x$，样本数$n=2100$。

图 2.1 所示为$f(x)$的多分维分形曲线，图 2.2 则为$f(x)$的局部维数变换。

算例 2 对于 Weierstrass 函数：$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{3}{2}\right)^{-k/2}\sin\left(\left(\frac{3}{2}\right)^k x\right)$

该函数具有自仿射性和相同的局部维数 dim(f)=1.5，所添加噪音为高斯白噪声，均匀取值的样本数$n=800$，选具有 2 阶消失矩的 *Daubechies* 小波作为处理工具。结果见以下图 2.3~2.6。

图 2.3 和图 2.5 结果表明，加阈去噪法对原曲线的不规则程度影响不大，所测维数值(1.47)和真实值(1.50)很接近，结果比较理想。而图 2.3 和图 2.6 表明，采用小波模极大值方法去噪，盒维数结果(1.25)则和真实值偏差较大，说明有平滑作用的滤波去噪方法对原分形曲线的恢复不太合适。图 2.4 显示加有噪音的数据样本计算出的维数会明显地改变原来曲线的维数。

2.6 本章小结

在这一章中，我们首先分析了分形曲线维数的传统计算方法及其两个缺陷：一是忽略曲线局部细节用整体、平均的单一维数表达曲线的不规则程度；二是实际测量数据受到“噪音”污染后会增大或减少维数估值。针对以上两个问题，文中提出了一个多分维分形曲线模式，强调了曲线局部维数的存在，以便能完整准确地刻画分形曲线的不规则性。其次，为了把分形函数从噪音中分离出来并尽大可能地保留其维数，文中采用了加阈小波去噪方法对样本数据进行处理，给出了利用小波系数计算曲线的局部分维数公式，并证明了其收敛性。

在文章的最后，用两个仿真算例对于以上所提问题加以说明和验证。

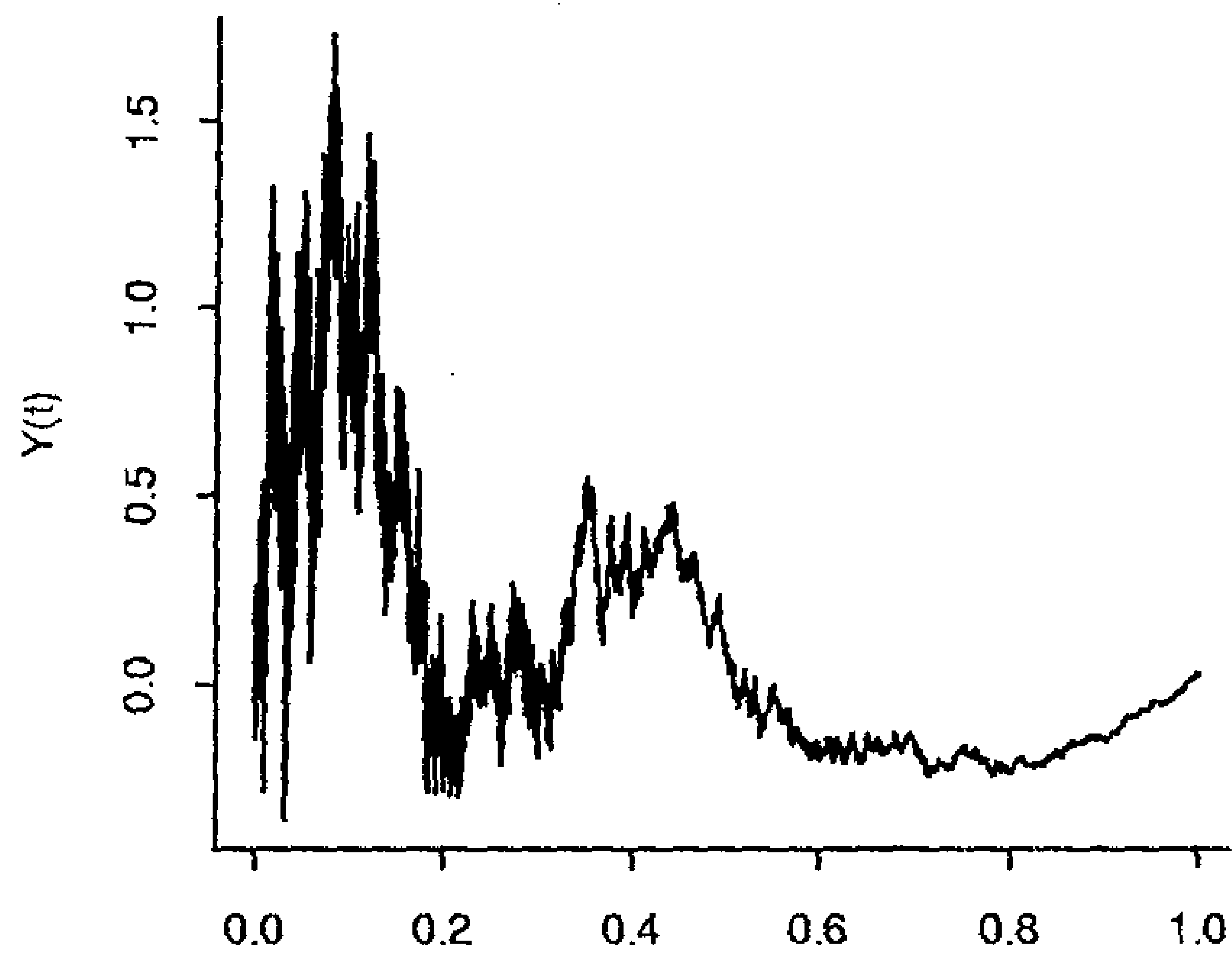


图 2.1 $f(x)$的多分维分形曲线，

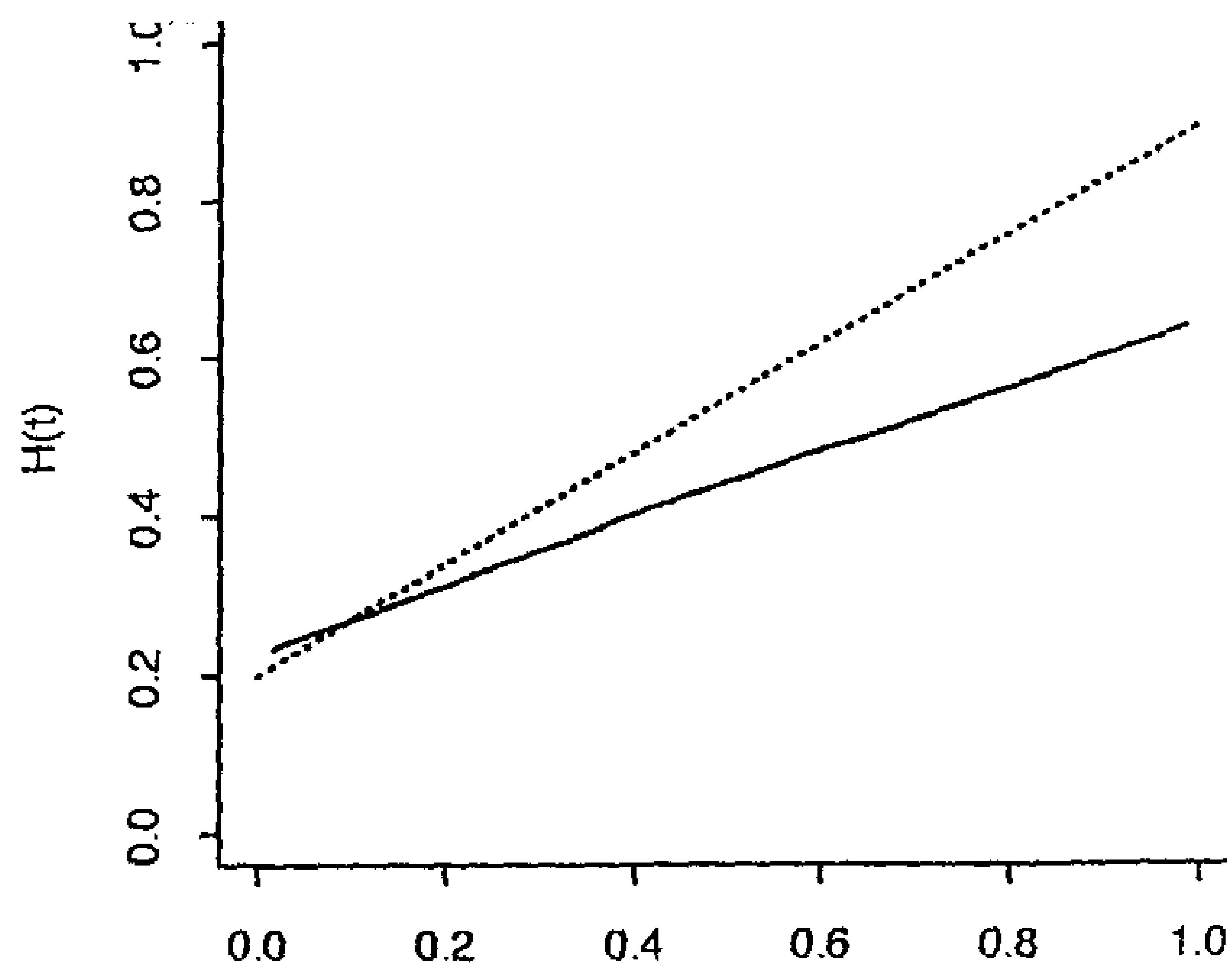


图 2.2 $f(x)$的局部维数变换。

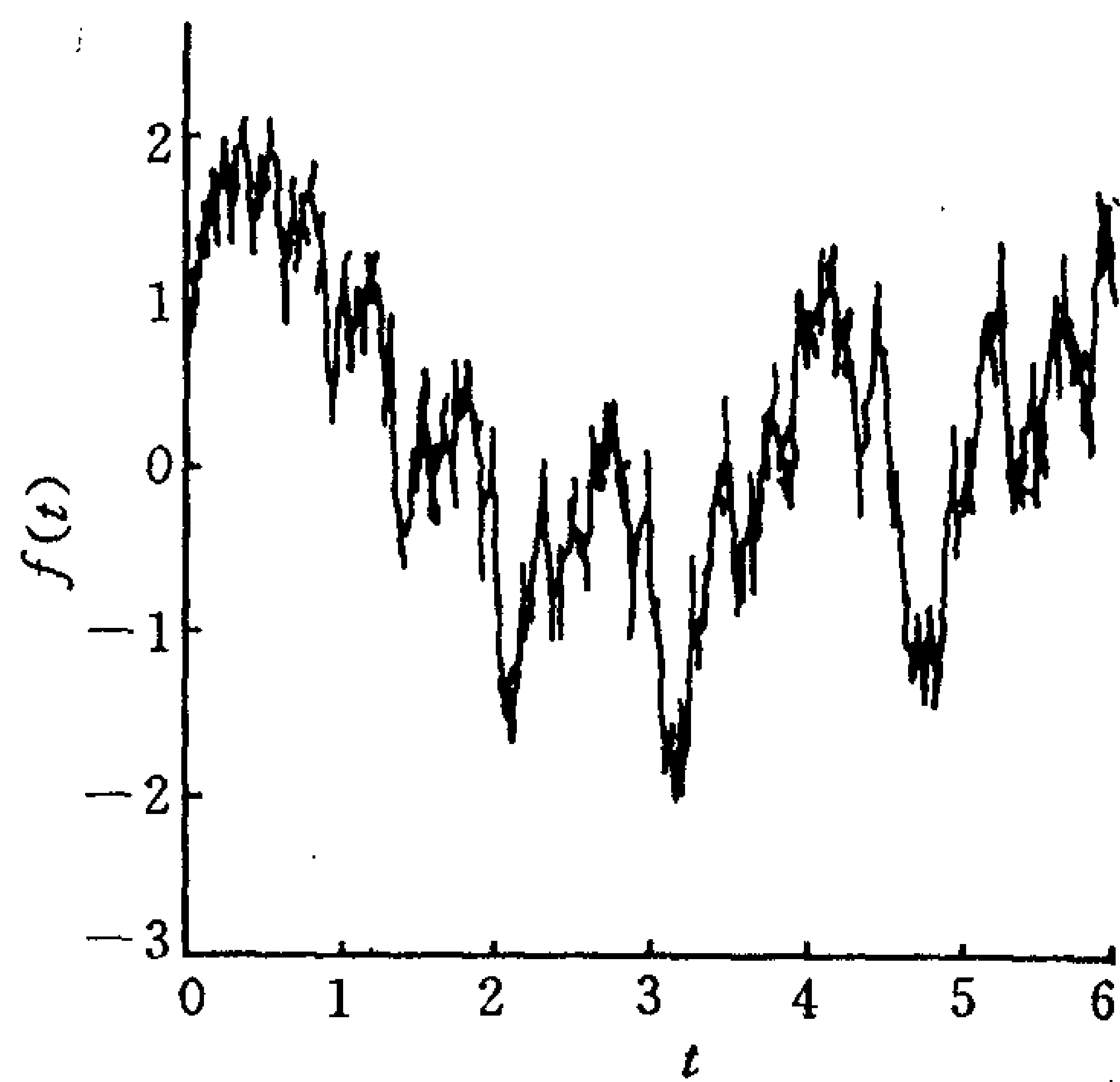


图 2.3 原 weierstrass 分形曲线（dim(f)=1.5）

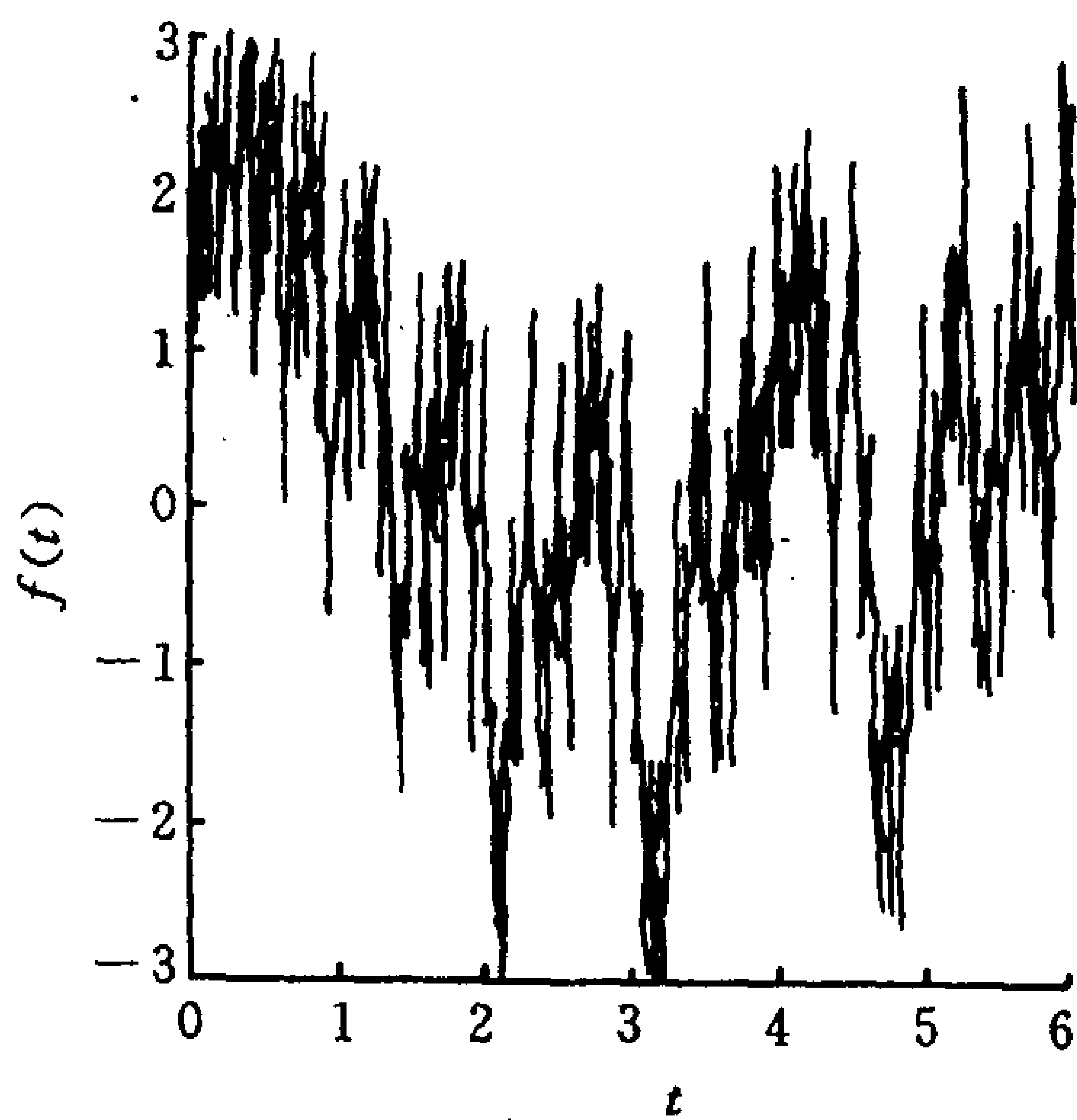


图 2.4 加白噪声后的曲线(dim(f)=1.96)

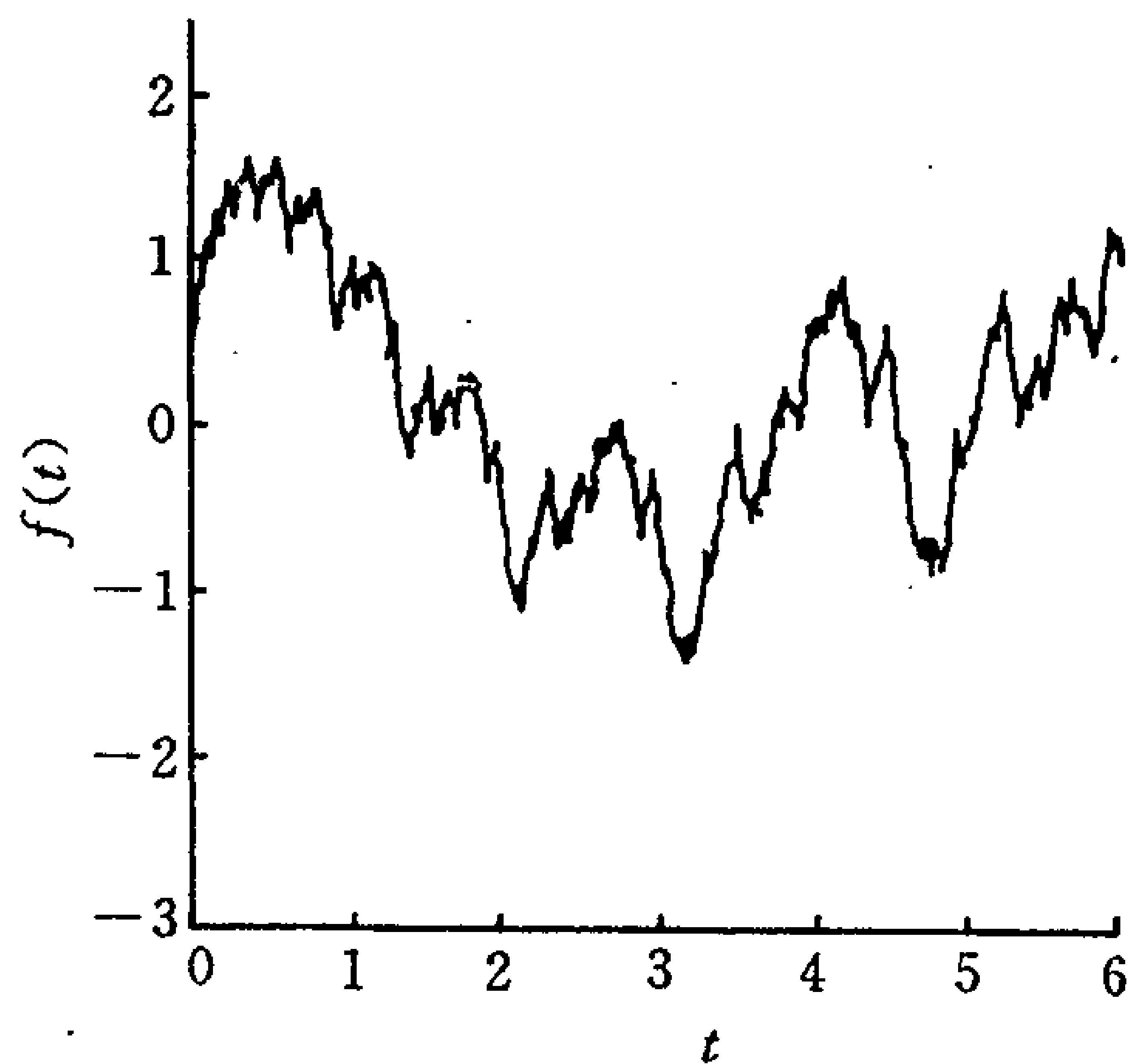


图 2.5 加阈去噪后的曲线（dim(f)=1.47）

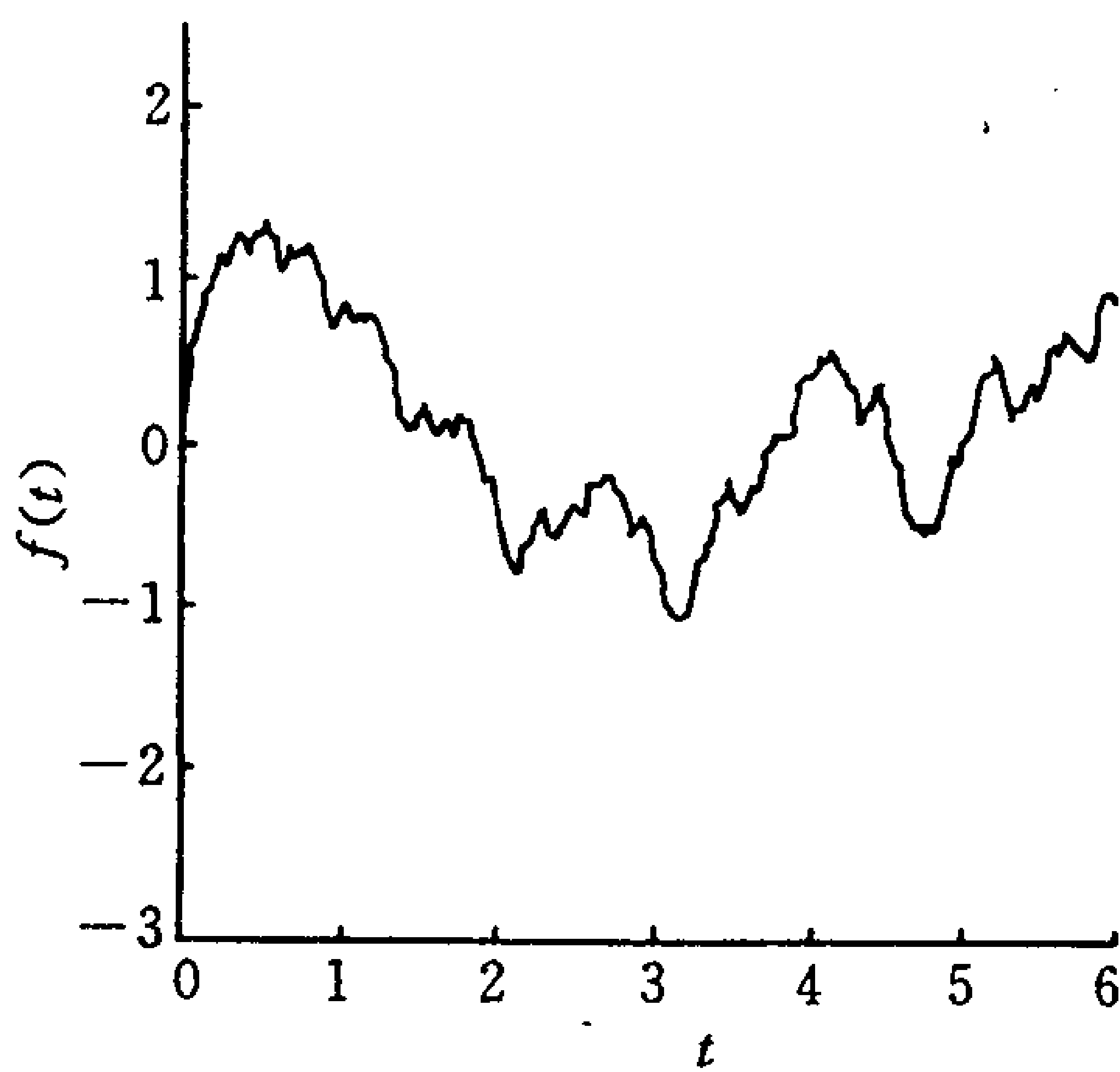


图 2.6 模极大值去噪后的曲线(dim(f)=1.24)

第三章 分形反演问题的小波解法

3.1 引言

分形反演问题是目前分形研究中的前沿课题之一，也是最为困难的问题。分形反问题就是找分形体所具有的各种不变性，这些不变性常常和一些数学变换诸如缩放、平移和旋转等相联系，可以说解决反问题就是等价于找出这些基本的数学变换来。而一个分形集的产生往往是在上述不变式基础上通过迭代过程来实现，所以迭代函数系统是构成分形反问题的重要部分。

3. 1. 1 分形反问题研究发展的历史概要及主要应用

在 1985 年 M.F.Barnsley[7]利用一类设定的迭代函数系统来逼近分形的不变性，从而开创了分形反演问题研究的先河，但方法并不是对分形本身所具有真实不变性进行分析只能认为是分形反演工作的一次尝试。A.Arneodo 等人在 1994 年至 1995 年期间利用小波变换和拼贴定理在对一维“饼格”(Cookie-Cutters)和角向集 DLA 的反演中获得成功[30]，实现了这一领域一次真正的突破，从而奠定了分形反演的理论基础。在实际应用中，他们把小波变换最初极大值分岔点作为特征点从使反演过程具有了可操作性。在这里 A.Arneodo 等人并未对整个分形反问题作全面的分析和考察,另外这种特征点的选择也是有探讨的余地可言。随后 Forte.B 等人[31]几乎同期则用迭代函数系统来解决逼近函数图象的反问题，这种逼近方法在一些分形图象压缩方面发挥了作用。由于这种逼近的映射数目和原始映射不同，即使是一个简单吸引子，上述方法也不会找到实际正确数目的映射。1995 年 Struzik.Z.R.[94]提出了利用小波变换分析自仿射分形反演问题的理论基础，但他只是给出示范性表述，并未给出严格证明。另外，值得一提的是，1997 年中国学者朱治军和李后强俩人[33]则从小波变换最末极大值入手，对解决分形反演问题进行了一次成功的尝试。

分形反问题研究在图像和数据压缩技术方面有着非常重要的应用，越来越受到各界人士的高度重视。假如可以对给定吸引子加以计算，则用有限个少量的压缩变换可以决定高度复杂的精细结构，这样复杂的图象便可以有效地进行编码储存和传输。整个图形集就可以用有限个映射进行编码。这方面，数学家 Barnsley 和 Sloan 1988 年在其文章中宣称，利用他们的方法对静态图像压缩可获得高达的压缩比，这一报道立即在工业界引起极大的震动。1992 年软件开发商 Microsoft 公司运用分形技术推出一套多媒体百科全书在一张光盘上可以储存大量的文本、

图片、声音和动画等数据信息。1996 年 3 月 Barnsley 领导的迭代系统公司在所在地美国亚特兰大市召开了一个"分形图像压缩技术专题研讨会"，美国副总统亲临会场祝贺，以示政府对此项技术的高度关注。

3.1.2 目前分形反问题研究的方法和特点

在分形反问题中大多考虑下列特殊形式的 IFS，$F=\{X:\vec{w}=(w_1,w_2,\cdots,w_N)\}$，其中压缩映射个数 N 固定,每一个 $w_i:X\to X$ 为下面仿射变换：

$$w_i(x)=\begin{pmatrix} s_1 & s_3 \\ s_2 & s_4 \end{pmatrix}x+\begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \end{pmatrix} \qquad x\in X\subset\Re^2$$

令向量 $\vec{s}=(s_i,i=1,2,3,4)$，向量 $\vec{t}=(t_i,i=1,2)$，于是这 N 个仿射变换 $(\vec{s},\vec{t})$ 就构成 IFS 全体。若考虑概率分布 $\vec{p}$，则参数系统 $(\vec{s},\vec{t},\vec{p})$ 为概率型 IFS。

目前 IFS 分形反问题的求解概括起来有下面三种方法：

（1）基于拼贴定理的 IFS 反问题：

设 A 为现实图像，据拼贴定理，如果存在 $IFS\{X;\vec{w}\}$，使得 $d_H\left(A,\bigcup_{i=1}^N w_i(A)\right)$ 充分小，则 A 和 IFS 吸引子 A_w 的距离 $d'_H(A,A_w)<(1-s)^{-1}d_H$ 也充分小。所以人们仅仅考虑 IFS 作用在现实图像上是否会有很小的变换。

确定型 IP1: $\forall A$, 求 $(\vec{s},\vec{t})\in\Re^{6N}$，使得

$$f(\vec{s},\vec{t})=d\left(A,\bigcup_{i=1}^N w_i(A)\right)\text{达到最小。}$$

概率型 IP2: $\forall A$, 求 $(\vec{s},\vec{t},\vec{p})\in\Re^{7N}$，使得

$$f(\vec{s},\vec{t},\vec{p})=d_H\left(A,\sum_{i=1}^N p_i(A\circ w_i^{-1})\right)$$

（2）基于矩方法的 IFS 反问题：

设 A 为现实图像,$\{G_{mn}=\int_X x^m y^n dA, m>0,n>0\}$ 为其各阶矩，$\{g_{ij},i>0,j>0\}$ 表示不变测度 μ 的各阶矩。

现在欲求概率 IFS $(X;\vec{w};\vec{p})$，使得下式达到最小：

$$f(\vec{w},\vec{p})=\sum_{i=1}^{M_1}\sum_{j=1}^{N_1}\left(g_{ij}(\vec{w},\vec{p})-G_{ij}\right)^2\to\text{最小}$$

以上两类方法都把图形压缩问题转化为求解复杂的非线性优化问题，其核心是寻找合适的优化算法。譬如，Barnsley 及其 Iterated System 公司许多专利产品都广泛采用了模拟退火优化算法。其大体上具有计算量大、稳定性差的特点。

（3）基于小波变换的 IFS 反问题

因为实际测量中涉及的量是测度，故定义测度 $\mu(x)$ 的小波变换为

$$W_\psi \mu(a,b) = \int_{\Re} \overline{\psi}\left(x - b/_a\right) d\mu(x), \quad a > 0, b \in \Re$$

则有 $$W_\psi \mu(a,b) = \frac{1}{p_k} W_\psi \mu(a', b')$$

$$a' = u_k a \qquad k = 1,2,\cdots,N. \tag{3.1.1}$$

$$b' = u_k b + v_k$$

对分形反演问题进行小波分析，由于分岔点特别多，按上式要找出b和b'这样的对应点是相当复杂的工作。一般的解决思路是：(3.1.1)式对分形域内所有点成立，则应该对某类特征点也成立。这样反问题就归结为这类特征点的尺度变换关系的确定，特征点的选择是反演工作中的一个重要方面。选择依据主要有两条：一是能否完整地描述整个分形的不变性；二是计算量的大小。Mallat 在 1992 年就已证明[55]，对于大多数函数来说，其小波变换的模极大值表示是$f(x)$的一个完整表示，这样借助极大值表示就能用较少的计算量描述分形的尺度不变性。有关特征点的选择，A.Arneodo 等人选择初始极大值分岔点作为特征点，Z.R.Struzik 1995 年则取小波变换极值分岔点为特征点，朱治军、李后强则取最末极大值点为特征点。后一种方法和前两种方法相比具有计算量小且可在较大尺度下对点做出判断的优点。

3．1．3 本章所用方法的思想依据及工作

本文所做的工作是基于以下三个方面的依据进行的：

1．Logan 曾在 1977 年[107]证明，对窄带信号而言,用信号本身的过零点可以完整地表征信号，只是表征不够稳健而已。小波本来就是带通函数。若小波是理想带通的，由定理可知，此时由$WT_{2^j}x(t)$的所有过零点，必然可以恢复$WT_{2^j}x(t)$。又因为小波变换是可逆的，这样必然达到恢复$x(t)$的目的。但理想滤波器条件并不完全满足，所以重建也就有点不够稳健是可以想到的。

2．若一个可微小波ψ求导后ψ'依然是一个小波，因为有下面的等式成立：

$$\frac{\partial W_\psi[f]}{\partial b}(a,b) = -\frac{1}{a} W_{\psi'}[f](a,b)$$

可知$W_\psi[f]$的模极大值点也就是$W_{\psi'}[f]$的某些零点，也就是说，选零点为特征点和以前选法依然能够获得一样平等的地位。

3．Barnsley 也已证明过，分形插值函数是定义于紧区间上的自仿射函数，是迭代函数系的唯一吸引子（连续函数），是产生分形图形的重要构造方法。

本文基于小波变换在零点的保相似性特征，在已知分形插值函数图形的情况下，从有限个小波变换零点出发，给出一种寻找一组仿射压缩变换 $w_i(i=1,2,\cdots,N)$ 使得该函数图形成为待求 $IFS(\vec{w})$ 吸引子的构造方法。

其内容安排如下：

在文章第二节里，考虑在完备的 Hausdorff 测度空间里分形插值函数的构造问题。在第三节主要讨论了小波变换零点处的保相似性特征。在随后第四和第五两节中，文中给出了分形插值函数反演的解及算法并用算例对算法的有效性加以验证。

3.2 分形插值函数的构造

设 $H(X)$ 为完备空间 X 的一个非空紧支集集合，给 X 附加一个 Hausdoff 测度，空间 $(H(X),d_H)$ 即为完备的测度空间.

设 $w_i: X \to X, i=1,2,\cdots,N,$ 为作用于 X 上的压缩映射，即存在 $0<s_i<1$，

使得 $d(w_i(x),w_i(y)) \le s_i d(x,y)$，对于任何 $x,y \in X$ 和每一个 i 均成立。由压缩映射定理可知，存在唯一的非空子集 $B \subset H(X)$，$B=\bigcup_{i=1}^{N} w_i(B)$。

这时 B 就称作迭代函数系 $IFS\{w_i, i=1,2,\cdots,N\}$ 的吸引子。

取 $D \in H(\Re)$，考虑映射 $w_i(i=1,2,\cdots,N)$：$[0,1]\times D \to [0,1]\times D$.

$$w_i\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = w_i\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha_i & 0 \\ \beta_i & \gamma_i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon_i \\ \theta_i \end{pmatrix}$$

其中，$\alpha_i,\beta_i,\gamma_i,\varepsilon_i,\theta_i \in \Re, 0<\alpha_i<1, 0<|\gamma_i|<1$

令 $P_1=(0,y_1)$ 为 w_1 的不动点，$P_{N+1}=(1,y_{N+1})$ 为 w_N 的不动点，选择参数使得 $w_i(P_{N+1})=w_{i+1}(P_1)$，对一切 $i=1,2,\cdots N-1$ 均成立，且 $w_1(P_1),w_2(P_1),\cdots w_N(P_1)$ 不全共线。这样可保证 $[w_i(P_1),w_i(P_{N+1})]$ 形成一非平凡多边形曲线。

另外 $a_{i,},d_i$ 的选择要确保映射 w_i 对于某一度量来说是压缩映射。

这样迭代函数系统 $\{w_1,w_2,\cdots w_N\}$ 的吸引子就是一个无处可微的连续函数 f 的图形,函数 f 就是过插值点 $w_1(P_1),w_2(P_1),\cdots w_N(P_1),P_{N+1}$ 的分形插值函数。

对于一个函数 $f \in [0,1]$，定义算子 $H: C[0,1] \to C[0,1]$

$$(Hf)(x)=\beta_i l_i^{-1}(x)+\gamma_i f(l_i^{-1}(x))+\theta_i, l_i(x)=w_{x,i}(x,y),$$
$$w_i(P_1)=P_i, \forall x \in [x_{i-1},x_i]$$

设 f_0 是具有插值点 $P_1,P_2,\cdots,P_{N+1}$ 的点态线性函数，则 $f_{n+1}(x)=(Hf_n)(x) \to f,(n \to \infty), f$ 是 H 的不动点，即分形插值函数可以看成一函

数列的一致收敛极限函数。

另外，由于$P_1,P_2,\cdots,P_N$不共线，则由$IFS(w_i,i=1,2,\cdots,N)$形成图像的分形维数是下列方程的唯一解[3]：

$$\sum_{i=1}^{N}|\gamma_i|\alpha_i^{D-1}=1$$

3.3 小波变换零点的自相似特征讨论

设小波函数ψ是一个$n+1$次可微且紧支于$[-K.K]$光滑可微函数$(n\geq 2)$ $\varphi(x)$的k次导数，f是一分形插值函数。定义f在ψ下的小波变换为：

$$W_\psi f(b,a)=\frac{1}{\sqrt{a}}\int_{-\infty}^{=\infty}\psi\left(\frac{x-b}{a}\right)f(x)dx$$

对上述ψ ,若ψ具 k 阶消失距$(k\geq 2)$，$W=\{w_1,w_2,\cdots,w_N\}$为一迭代函数系统IFS,任取$(b,a)\in\Re\times\Re_+$，使得$(-aK+b,aK+b)\subset[0,1]$成立，那么就可以得到小波变换零点的自相似性关系方程:

$$W_\psi f(b,a)=\frac{1}{\alpha_i\gamma_i}W_\psi f(\alpha_i b+\varepsilon_i,\alpha_i a),\quad i=1,2,\cdots,N.$$

证明:

$$W_\psi f(b,a)=\frac{1}{\sqrt{a}}\int_{-aK+b}^{aK+b}\psi\left(\frac{z-b}{a}\right)f(z)dz=\frac{1}{\alpha_i\sqrt{a}}\int_{l_i(-aK+b)}^{l_i(aK+b)}\psi\left(\frac{l_i^{-1}(x)-b}{a}\right)f\left(l_i^{-1}(x)\right)dx$$

$$=\frac{1}{\alpha_i\sqrt{a}}\int_{l_i(-aK+b)}^{l_i(aK+b)}\psi\left(\frac{l_i^{-1}(x)-b}{a}\right)\frac{1}{\gamma_i}\left(f(x)-\beta_i l_i^{-1}(x)-\theta_i\right)dx$$

$$=\frac{1}{\alpha_i\sqrt{a}}\int_{l_i(-aK+b)}^{l_i(aK+b)}\psi\left(\frac{\frac{x-\varepsilon_i}{\alpha_i}-b}{a}\right)\left(\frac{1}{\gamma_i}f(x)-\beta_i\frac{x-\varepsilon_i}{\alpha_i}-\theta_i\right)dx$$

$$=\frac{1}{\alpha_i\gamma_i\sqrt{a}}\int_{l_i(-aK+b)}^{l_i(aK+b)}\psi\left(\frac{\frac{x-\varepsilon_i}{\alpha_i}-b}{a}\right)f(x)dx+\frac{\beta_i}{\gamma_i\sqrt{a}}\int_{-aK+b}^{aK+b}\psi\left(\frac{x-b}{a}\right)xdx$$

$$+\frac{\theta_i}{\gamma_i a}\int_{-aK+b}^{aK+b}\psi\left(\frac{x-b}{a}\right)dx$$

鉴于ψ是一个至少有二阶消失矩的小波函数，故可得到下面的结论：

$$W_\psi f(b,a)=\frac{1}{\alpha_i\gamma_i\sqrt{a}}\int_{l_i(-aK+b)}^{l_i(aK+b)}\psi\left(\frac{x-(\alpha_i b-\varepsilon_i)}{\alpha_i a}\right)f(x)dx$$

$$=\frac{1}{\alpha_i\gamma_i}W_\psi f(\alpha_i b+\varepsilon_i,\alpha_i a)$$

于是得到如下命题：

$W_\psi f(b,a)=0,\frac{\partial W_\psi f}{\partial b}(b,a)=-\frac{1}{a}W_{\psi'}f(b,a)=0$ 等价于下述两个等式：

$$W_\psi f(\alpha_i b+\varepsilon_i,\alpha_i a)=0$$

$$\frac{\partial W_\psi[f]}{\partial b}(\alpha_i b+\varepsilon_i,\alpha_i a)=-\frac{1}{a}W_{\psi'}[f](\alpha_i b+\varepsilon_i,\alpha_i a)=0$$

在这里，定义 A 为满足上述两式的零元素(b,a)的集合。

$$A(\psi,f)=\left\{(b,a)\in\Re\times\Re\left|W_\psi[f](b,a)=0\text{且}\frac{\partial W_\psi[f]}{\partial b}(b,a)=0\right.\right\}$$

3.4 分形插值函数反问题的解及算法

设$W=\{w_1,w_2,\cdots w_N\}$是一个带有参数$\alpha_i,\beta_i,\gamma_i,\varepsilon_i,\theta_i$的一迭代函数系统，$f$为相对应的分形插值函数，同时取$(b,a)\in A$，则存在点$(b_i,a_i)\in A,i=1,2,\cdots N$. 使得下列等式成立：

$$a_i=\alpha_i a\cdots\cdots\cdots(3.4.1)$$

$$b_i=\alpha_i b+\varepsilon_i\cdots(3.4.2)$$

$$\sum_{i=1}^{N}\alpha_i=1\cdots\cdots\cdots(3.4.3)$$

$$\alpha_i+\varepsilon_i=\varepsilon_{i+1}\cdots(3.4.4)$$

同时有递推式：

$(b_i^{(j)},a_i^j)\in A$， 且有 $b_i^j=\alpha_i b_i^{j-1}+\varepsilon_i,a_i^j=\alpha_i a_i^j,j=2,3,\cdots$

利用以上这些特性，可给一个分形插值函数图形编码，从而得到最小数目的仿射映射$w_1,w_2,\cdots,w_N$。

具体算法如下：

步骤 1：由$(b^0,a^0)\in A$，知$a^0=\max\{a\in\Re_=|\exists b,(b,a)\in A\}$

步骤 2：继续从尺度a^0到下一尺度a_i^0 产生点$(b_i^1,a_i^1)\in A$

步骤 3：由计算(3.1)、(3.2)参数α_i,ε_i并检查是否符合(3.3)、(3.4)条件。

然后由f在 X 轴不共线的三个值解方程，可求出$\beta_i,\gamma_i,\theta_i$的值

步骤 4：必要时进行下一尺度计算，重复以上步骤。

该方法的特点是在所选尺度上利用较少量的小波变换的零点来构造出分形插值函数的迭代函数系。

3.5 举例

选取一个二次光滑样条函数作为尺度函数$\phi(x)$来构造小波函数$\varphi(x)$

$$\phi(x)=\begin{cases} x^2 & 0\le x\le 1 \\ -2x^2+6x-3 & 1<x\le 2 \\ (3-x)^2 & 2<x\le 3 \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

给出一族仿射映射$W=\{w_1,w_2\}$

$$w_1\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0.3 & 0\\ 50 & 0.5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

$$w_2\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0.3 & 0\\ -30 & 0.25\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0.6\\0.4\end{pmatrix}$$

经由小波变换零点计算出的参数如下表所示：

I	α_i	β_i	γ_i	ε_i	θ_i
1	0.331	48.51	0.52	0.00	0.00
2	0.331	-32.12	0.24	0.65	38.96

可以看出由零点计算出的映射能够较好地逼近所给分形插值函数的原迭代函数系 IFS。

上述所用分形插值函数、小波变换零点及反问题构造过程见下面图 3.1 和图 3.2 所示。

3.6 本章小结

在用小波处理分形反问题理论方面，不同于以往特征点的选择，我们提出了借助小波变换零点这类特征点构造分形插值函数吸引子 IFS 参数的新方法。首先我们讨论了在 Hausdorff 测度空间中分形插值函数的一般构造理论，然后证明了小波变换零点的保相似性，给出一个零点集 $A(\psi, f)$ 和一组参数递推关系式。算例表明该方法是有效可行的，而且可以确定 IFS 中映射的正确数目。

分形反演中存在的问题及进一步发展的方向：

1. 由小波变换值的关系反推分形的变换关系，然而，这种反推是否确定唯一 的分形？这是一个尚待解决的问题。

2. 对于非相似分形（如圆和椭圆、球和椭球）的小波分析反演，这必然涉及尺度参量应该为 n 维对角矩阵的小波函数。

$$\varphi(x) = \sum_{b \in Z^d} a_b \varphi(Ax - b), \quad A \text{ 为一对角矩阵。}$$

这种小波函数的研究已有不少[1],[2]。尽快地将其用于这类分形，这也是以后反演工作的一个研究方向。

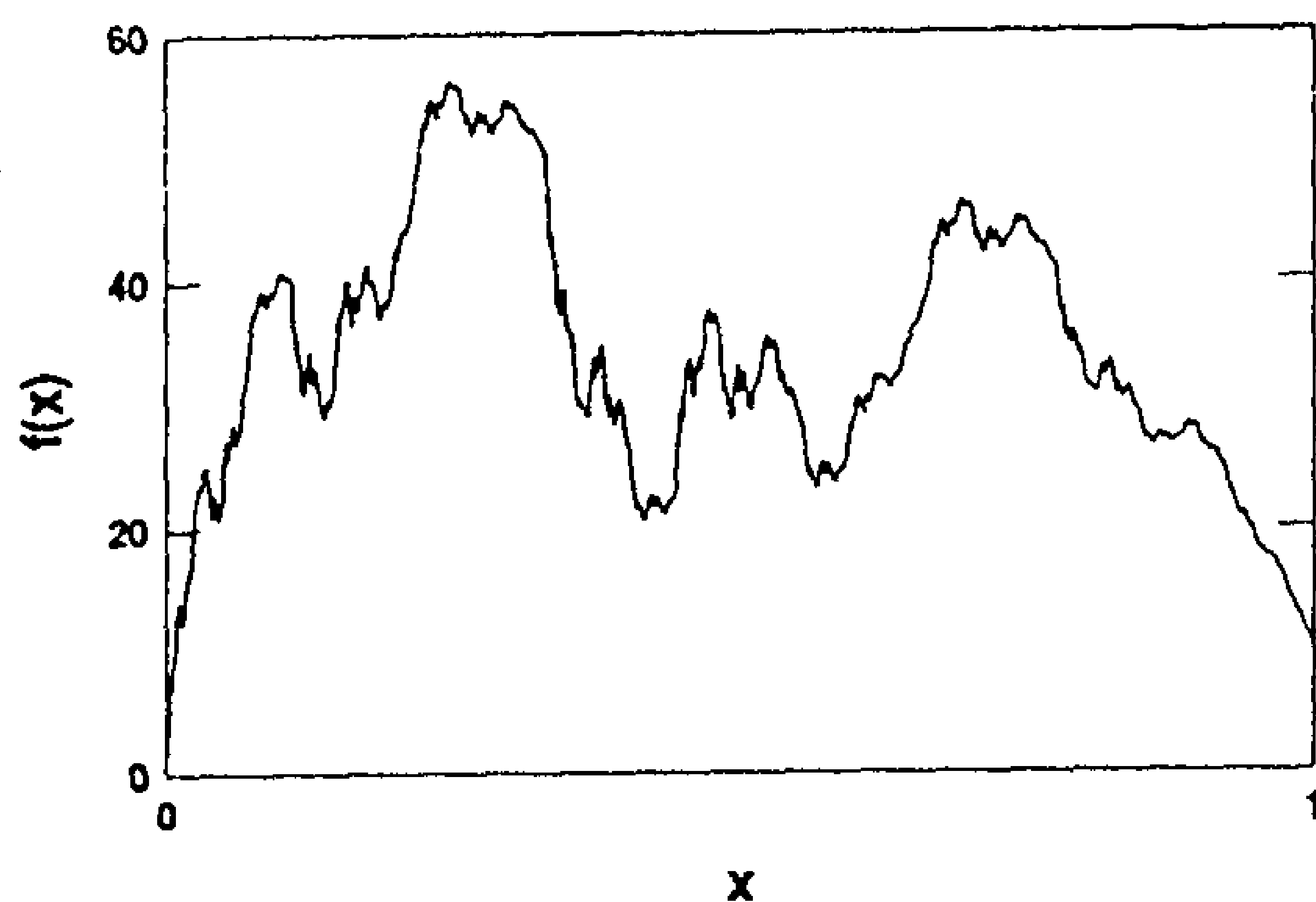


图 3.1 由 $w_i(i=1,2)$ 所对应的分形插值函数 $f(x)$ 图形

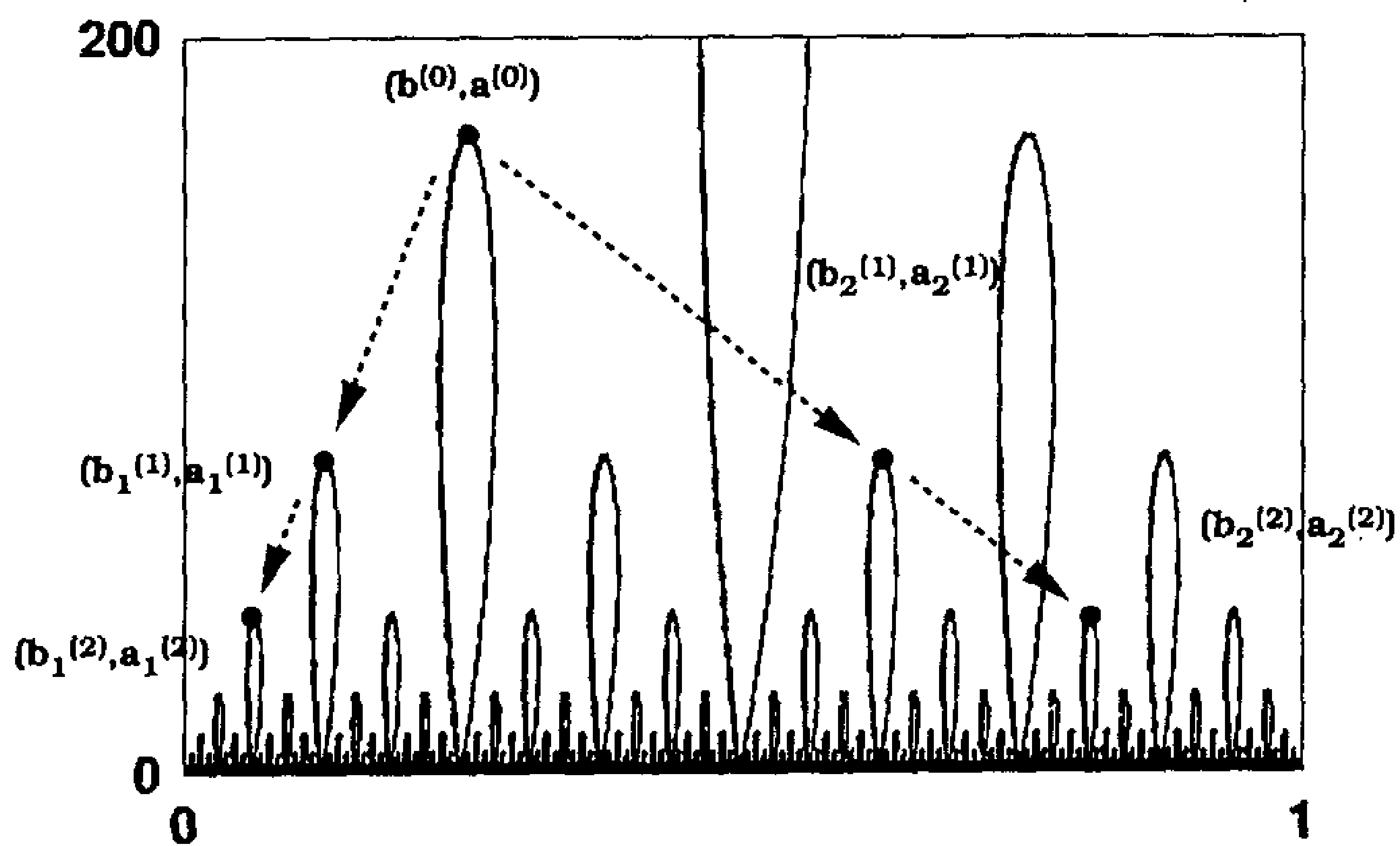


图 3.2　$f(x)$ 的小波变换零点及由 (b^0,a^0) 形成 $(b_i^{(j)},a_i^{(j)})$ 构造过程

第四章　时变分形维数的概念与计算

4.1 引 言

分形概念揭示了自然界一大类无规则形体的标度不变性，即就是在分形几何体动力学演化过程中某一时刻在一定的标度尺度范围内，其相应的测度不随尺度的改变而发生变化，其局部与整体在形状、结构等方面具有自相似性。人们发明了各种分形维数，它们是在分形意义上由标度关系推出的一个确定的数量值，除了反映该结构的自相似构造规律外，尚不能完全揭示事物演化的时空动力过程。与此同时，人们在研究许多自然现象的相似性时，又总是假定维数是一个常数。事实上，自然现象在一维时间世界的演化常常会导致自相似性变化。在这样具有局部自相似过程的情形下，上述维数不变的思维就是不现实的。为了更充分、完整地描述这种随时间演化的现象，文中提出了新的概念——时变维数函数 $D(t)$。

这一思想受到下面两个事实的启发：彼得斯 1991 年[46]用 R/S 分析法（重标极差法）计算了分数布朗运动(FBM)中赫斯特(Hurst)指数（反映序列参差不齐程度及其相关性）在不同时间增量段（日，月，年）上的结果，发现 Hurst 指数是不同的这一事实。在基因科学中，DNA 链编码域中的核甘酸序列和非编码域的序列在自相似性特征方面维数[48]是有区别的，若采用时变维数就可以很好地描述 DNA 序列在时空中的合成演变过程。

在平面空间内，由于分数布朗运动模型(FBM)及分整自回归滑动平均模型(ARFIM)中的 Hurst 指数 H 和分形维数 D 有着下述的数量关系：$D=2-H$，而且分数布朗运动在描述地貌生成、粒子随机运动、资本市场股价波动等方面有广泛的应用。因此，本文选取 FBM 模型 ARFIMA 模型作为突破口转而研究时变 Hurst 指数这一问题。此时有 $D(t)=2-H(t)$。同时，我们注意到，由于具有局部自相似随机过程中的 Hurst 指数是时变的，FBM 模型及 ARFIM 模型随机过程及其相关的增量过程一般来说都是非平稳的。在处理非平稳性及自相似性方面，小波分析已被证明是一个非常有效的工具。因此，在估算时变 Hurst 指数的过程中，小波变换将起主角作用。对于一个局部自相似过程，我们借助小波变化建立了随机变量连续小波变换平方和小波变换尺度之间的一个局部对数线性关系，然后利用最小二乘法估计出 $H(t)$。当然在实际应用中，这样的计算过程是用样本数据的离散小波变换完成的。

本章所做的主要工作有以下几个方面：在第二节里，在统计自相似定义的基础上给出了一个局部自相似随机过程定义，并通过时变指数的引入对原有的 FBM

模型和 ARFIM 模型加以改造，使之成为具有局部自相似性的随机过程；在第三节，利用 Daubechies 小波对局部自相似过程加以变换处理，通过最小二乘法建立了一个时变 Hurst 指数的估计式，并且证明了估计指数和原指数是相容性的。在随后的第四节，文中给出了获得时变指数技术方面的算法。最后的第四、五节，用仿真算例对方法的有效性加以验证，并以上海股市股票周指数走势分析为例进行实证分析。

4.2 局部自相似随机过程的描述

4.2.1 一般自相似随机过程的讨论

一个统计自相似过程可大致看成一个和观测距离无关且保持相同行为样本轨道的随机过程。借助这一过程，人们就可以为产生于许多科学领域中的数据建模。最初自相似过程是通过 B.B.Mandelbrot[4] 的工作引入的。

设 L 为随机过程 $Y(t)$ 的联合分布，若满足 $L(Y(ct))=L(c^H Y(t))$， $c>0$，则称 $Y(t)$ 是一个统计自相似性的随机过程。人们在实际应用中都假设 $Y(t)$ 具有二阶矩且增量过程 $X(t)=Y(t)-Y(t-1)$ 也是平稳的。其中 H 为自相似参数， $H\in(0,1)$。

假设 $Y(t)$ 为一零均值的随机过程， 其协方差函数为 $\Gamma_t(s_1,s_2)$

$$\Gamma_t(s_1,s_2)=Cov\{Y(t+s_1),Y(t+s_2)\}$$

当 $|s_1|+|s_2|\to 0$ 时，若 $\Gamma_t(s_1,s_2)$ 满足下式，则称 $Y(t)$ 是一个局部自相似过程。

$$\Gamma_t(s_1,s_2)=\Gamma_t(0,0)-q(t)|s_1-s_2|^{2H(t)}\{1+o(1)\}, \qquad \cdots\cdots(4,2,1)$$

其中 $q(t)\geq 0$， $H(t)$ 为局部尺度指数函数。

由式 $(4,2,1)$ 式，我们可以知道 $Y(t)$ 的数学期望满足

$$E\{[Y(t+s_1)-Y(t+s_2)]^2\}=q(t)|s_1-s_2|^{2H(t)}\{1+o(1)\} \qquad (|s_1|+|s_2|\to 0)$$

从 $(4,2,1)$ 式还可知道，对于很小的 s_1 和 s_2， $Y(t+s_1)$ 和 $Y(t+s_2)$ 的相关性依据因子 $|s_1-s_2|^{2H(t)}$ 而减弱。对于给定的 $|s_1-s_2|$，当 $H(t)$ 从 1 减小到 0 时，随机过程 $Y(t)$ 的局部自相关也相应减弱，从而产生出一个逐渐增大偏差和粗糙的样本轨道。

设 $Y(t)$ 的增量过程为 $X(t)=Y(t)-Y(t-1)$，该增量过程的协方差函数表达为：

$$\gamma_t(u_1,u_2)=Cov\{X(t+u_1,t+u_2)\}$$

假设增量过程的 Winger-Ville 分布谱密度为 $f_t(\lambda)$

$$f_t(\lambda)=\frac{1}{2\pi}\int\gamma_t(\tau/2,-\tau/2)e^{-i\lambda\tau}d\tau$$

于是有

$$f_t(\lambda)=C(t)\lambda^{1-2H(t)}\{1+o(1)\},\quad \lambda\to 0, \qquad \cdots\cdots(4,2,2)$$

其中 $C(t)$ 为非负函数。

当 $X(t)$ 是平稳时，$f_t(\lambda)$ 不依赖于 t，从而还原为普通的谱密度函数 $f(\lambda)$

$$f(\lambda)=C\lambda^{1-2H}\{1+o(1)\}\ ,\quad \lambda\to 0, \qquad \cdots\cdots(4,2,3)$$

4.2.2 FBM 模型和 ARFIMA 模型的拓展

1．FBM 模型的拓展：

我们在下面的一个积分型随机过程（简称 GFBM）引入时变的自相似参数 $H(t)$，可以看成是分数布朗运动(FBM)的一个拓展。

$$Y(t)=\int_{-\infty}^{0}\left[(t-u)^{H(t)-1/2}-(-u)^{H(t)-1/2}\right]dB(u)+\int_{0}^{t}(t-u)^{H(t)-1/2}dB(u)\cdots\cdots(4,2,4)$$

其中实数 $t\ge 0$, $B(t)$ 为标准布朗运动，$H(t)\in(0,1)$。对于光滑的时变尺度指数 $H(t)$，GFBM 模型中的协方差函数满足 $(4,2,1)$ 式，所以 $Y(t)$ 呈现局部自相似行为。

FBM 模型中的增量过程就是一个分数高斯噪音，由于其谱密度满足 $(4,2,3)$ 式要求，所以它具有平稳性。在通常情况下，人们总是通过改变自相似参数 H 值的方式构造出一个改变了粗度的样本轨道。相比之下，GFBM 模型的增量过程谱密度函数则满足 $(4,2,2)$ 式，这表明增量过程是非平稳的。

2. ARFIMA 模型的拓展

在分整自回归滑动平均模型中，我们引入时变指数 $H(t)$，对其做一个扩展（简称 GARFIMA）。

设 $H(t)\in(0,1)$，$\varepsilon(t)$ 是 Gauss 白噪音，B 为后移算子：$BX(t)=BX(t-1)$，在 $t\ge 0$ 时，建立 GARFIMA 模型如下：

$$(1-\Phi(B))(1-B)^{H(t)-1/2}X(t)=(1-\theta(B))\varepsilon(t)$$

其中 $\Phi(B)$、$\theta(B)$ 分别为关于算子 B 的 p 阶和 q 阶多项式，其特征根位于单位

园之外。

$$\Phi(B)=1-\Phi_1(B)-\Phi_2 B^2-\cdots-\Phi_p B^p$$

$$\theta(B)=1-\theta_1(B)-\theta_2 B^2-\cdots-\theta_q B^q$$

另外一种变形形式为：

$$\Phi(B)(X(t)-u)=\theta(B)(1-B)^{1/2-H(t)}\varepsilon(t)=\theta(B)\eta(t)$$

其中u为$X(t)$的平均值，$\eta(t)=(1-B)^{1/2-H(t)}\varepsilon(t)$，因此$X(t)$可以转化为由“时变分数差分噪声”$\eta(t)$导出的 GARFIMA 过程。

当$\Phi(B)=\theta(B)$时，GARFIMA 模型可转化为下面的一个特殊形式：

$$(1-B)^{H(t)-1/2}X(t)=\varepsilon(t)$$

考虑到等式右端$\varepsilon(t)$为高斯白噪音，因此这个过程的扩展也可看成分整噪音 FIN(Fractionally Integrated Noise)的一个扩展式。

GARFIMA 模型和 ARFIMA 模型不同，它是一个非平稳的随机过程。一个 ARFIMA 过程可看成一个具有全局自相似性的增量过程[4]，而 GARFIMA 过程则是一个具有局部自相似性的增量过程。在描述易变形或不规则性的非平稳时间序列的建模中，GARFIMA 模型具有更广泛应用的潜力。

4.3 利用小波变换估算时变指数

4．3．1 基于小波变换的时变指数估计

设$\psi(x)$为 Daubechies 母小波,以$WY(a,t)$代表局部自相似过程$Y(t)$相对于尺度a和位置t的小波变换

$$WY(a,t)=a^{-1/2}\int\psi\left(\tfrac{u-t}{a}\right)Y(u)du=a^{1/2}\int\psi(x)Y(t+ax)dx$$

由$(4,2,1)$式及上式可知

$$E\left(|WY(a,t)|^2\right)=a^{-1}\iint\psi\left(\tfrac{u-t}{a}\right)\psi\left(\tfrac{v-t}{a}\right)E[Y(u)Y(v)]dudv$$

$$=a\iint\psi(x)\psi(y)E[Y(t+ax)Y(t+ay)]dxdy$$

$$=a\iint\psi(x)\psi(y)\Gamma_t(ax,ay)dxdy$$

$$\sim a\iint\psi(x)\psi(y)\{\Gamma_t(0,0)-q(t)|ax-ay|^{2H(t)}\}dxdy$$

$$= C_1 a^{1+2H(t)} \qquad (a \to 0) \qquad \cdots\cdots(4,3,1)$$

上式中令 $C_1 = -q(t)\iint |x-y|^{2H(t)} \psi(x)\psi(y)dxdy$

取 $y_t(a) = \log|WY(a,t)|^2$

$$\varepsilon_{t(a)} = \log\left\{|WY(a,t)|^2 \Big/ E\left(|WY(a,t)|^2\right)\right\} - E\left\{\log\left[|WY(a,t)|^2 \Big/ E\left(|WY(a,t)|^2\right)\right]\right\}$$

$$y_t(a) = \log\left[E\left(|WY(a,t)|^2\right)\right] + C_2 + \varepsilon_t(a) \qquad \cdots\cdots(4,3,2)$$

上式中 $C_2 = E\left\{\log\left[|WY(a,t)|^2 / E\left(|WY(a,t)|^2\right)\right]\right\}$。

在 a 值很小时，由(4,3,1)和(4,3,2)两式可近似地得到一回归模型：

$$y_t(a) \approx (\log C_1 + C_2) + [2H(t)+1]\log^a + \varepsilon_t(a) \qquad \cdots\cdots(4,3,3)$$

构造一个小尺度序列 $a_1 > a_2 > \cdots > a_L, a_j = 2^{-j}, j = 1,2,\cdots,n$。

令 $x_j = \log a_j, y_j = y_t(a_j), j = 1,2,\cdots,n$。对于 $\{(x_j, y_j), j = 1,2,\cdots,n\}$，利用最小二乘法得到(4,3,3)式中 $H(t)$ 的一个估计：

$$\hat{H}(t) = \frac{1}{2}\left[\frac{\sum(x_j - \bar{x})(y_j - \bar{y})}{\sum(x_j - \bar{x})^2} - 1\right] \qquad \cdots\cdots(4,3,4)$$

其中 $\bar{x} = \sum x_j \big/ n$，$\bar{y} = \sum y_j \big/ n$。

4．3．2　指数估计值 $\hat{H}(t)$ 和真实值 $H(t)$ 之间的一致相容性证明

可以证明上一节的估计式 $\hat{H}(t)$，在 $n \to \infty$ 时，有 $E\{\hat{H}(t)\} \to H(t)$，$Var\{\hat{H}(t)\} \to 0$ 成立，即两者是一致相容性的。

首先，我们证明 $E\{\hat{H}(t)\} \to H(t)$

$$\sum_{j=1}^{n}(x_j - \bar{x})^2 = (\log^2)^2\left[\sum_{j=1}^{n} j^2 - n(n+1)^2 \big/ 4\right] = (\log^2)^2 \, n(n+1)(n-1) \big/ 12 \sim n^3$$

$$\sum_{j=1}^{n}|x_j - \bar{x}| = (\log^2)\sum_{j=1}^{n}\left|j - (n+1)\big/2\right| \sim n^2$$

由(4,3,1)式知：

$$\log\left\{E\left[|WY(a,t)|^2\right]\right\}=\log C_1+(2H(t)+1)\log a+o(1),(a\to 0).$$

再结合(4,3,2)式可推知：

$$E(y_j)=(2H(t)+1)x_j+\left(C_2+\log^{C_1}\right)+o(1)$$

将以上各式代入(2.4)式中得到， $E\{\hat{H}(t)\}=\frac{1}{2}\left[\frac{\sum(x_j-\bar{x})E(y_j-\bar{y})}{\sum(x_j-\bar{x})^2}-1\right]$

$$=H(t)+o(n^{-1})\to H(t),(n\to\infty)$$

其次，证明 $Var\{\hat{H}(t)\}\to 0$

下面计算 $\hat{H}(t)$ 的方差， $Var(\hat{H}(t))=\frac{\sum_{ij}(x_j-\bar{x})(x_i-\bar{x})Cov(y_i,y_j)}{4\left[\sum(x_i-\bar{x})^2\right]^2}\cdots(4,3,5)$

其中分子部分展开为

$$\sum_{ij}(x_i-\bar{x})(x_j-\bar{x})Cov(y_i,y_j)=\sum_{ij}x_ix_jCov(y_i,y_j)-\bar{x}\sum_{ij}(x_i+x_j)Cov(y_i,y_j)$$
$$+(\bar{x})^2\sum_{ij}Cov(y_i,y_j)$$

设 ψ 为具有 M 阶消失矩的 Daubechies 小波， K 是一个依赖 t 而和 a 无关的常数。当 $a_1,a_2\to 0$ 时，有下式成立。

$$Cov\{WY(a_1,t),WY(a_2,t)\}=\frac{1}{\sqrt{a_1a_2}}\iint\psi\left(\frac{u-t}{a_1}\right)\psi\left(\frac{v-t}{a_2}\right)E[Y(u)Y(v)]dudv$$
$$=\sqrt{a_1a_2}\iint\psi(x)\psi(y)E\{Y(t+a_1x)Y(t+a_2y)\}dxdy$$
$$=(a_1a_2)^{1/2}\iint\psi(x)\psi(y)\Gamma_t(a_1x,a_2y)dxdy$$
$$\sim\sqrt{a_1a_2}\iint\psi(x)\psi(y)\left[\Gamma_t(0,0)-C(t)|a_1x-a_2y|^{2H}\right]dxdy$$
$$=\left[-C_1(t)(a_1a_2)^{1/2}\right]\iint\psi(x)\psi(y)|a_1x-a_2y|^{2H(t)}dxdy$$
$$=-C(t)a_1^{2H(t)+1/2}a_2^{1/2}\iint\psi\left(u+y\,{}^{a_2}\!/_{a_1}\right)\psi(y)|u|^{2H(t)}dudy$$

当 $a_1\to 0,a_2\to 0$ 且 ${}^{a_2}\!/_{a_1}\to 0$ 时，我们将 $\psi\left(u+y\,{}^{a_2}\!/_{a_1}\right)$ 关于 u 进行 M 阶 Taylor

展开，并代入上式得到

$$\psi\left(u+y\,{}^{a_2}\!/_{a_1}\right)=\psi(u)+y\psi'(u)\left({}^{a_2}\!/_{a_1}\right)+\cdots+{}^{1}\!/_{M!}\,y^M\psi^{(M)}(u)\left({}^{a_2}\!/_{a_1}\right)^M\{1+o(1)\}$$

$$Cov\{WY(a_1,t),WY(a_2,t)\}\sim Ka_1^{\,2H(t)+1/2}a_2^{\,1/2}\left({}^{a_2}\!/_{a_1}\right)^M$$

这个结果也暗示小波变换系数之间的相关系数满足：当被选择的a_1,a_2均很小且有$a_2<a_1$成立时

$$\rho\{WY(a_1,t),WY(a_2,t)\}\le K\left({}^{a_2}\!/_{a_1}\right)^{M-H} \qquad \cdots\cdots(4,3,6)$$

同时，我们知道，对一双零均值的正态分布随机变量X,Y而言，有下面的关系式成立：

$$\left|\rho\{\log(X^2),\log(Y^2)\}\right|\le[\rho(X,Y)]^2 \qquad \cdots\cdots(4,3,7)$$

把$(4,3,6)$和$(4,3,6)$两式结合起来得到

$$\left|\rho\{y(a_1),y(a_2)\}\right|\le[\rho\{WY(a_1,t),WY(a_2,t)\}]^2\le K\left({}^{a_2}\!/_{a_1}\right)^{2(M-H)}$$

于是当$a_2<a_1$，且a_1、a_2均很小时，$|Cov(y(a_1),y(a_2))|\le K\left({}^{a_2}\!/_{a_1}\right)^{2(M-H)}$

由此推知：$\left|Cov(y_i,y_j)\right|\le K\ 2^{2|i-j|(H-M)}$

$$\begin{aligned}\left|\sum_{ij}x_ix_jCov(y_i,y_j)\right|&\le K\ \sum_{ij}ij2^{2|i-j|(H-M)}\\&\le K\sum_{i\le j}ij2^{2(j-i)(H-M)}\\&=K\ \sum_{i=1}^{k}\left[i2^{-2i(H-M)}\left\{\sum_{j=i}^{k}j2^{2j(H-M)}\right\}\right]\\&\le K\sum_{i=1}^{k}i^2\sim k^3\end{aligned} \qquad \cdots\cdots(4,3,8)$$

同理可证

$$\bar{x}\left|\sum_{ij}x_iCov(y_i,y_j)\right|\sim k^3,\quad(\bar{x})^2\left|\sum_{ij}Cov(y_i,y_j)\right|\sim k^3 \qquad \cdots\cdots(4,3,9)$$

综合以上$(4,3,7)$和$(4,3,8)$式得到：

$$\sum_{ij}(x_i-\bar{x})(x_j-\bar{x})Cov(y_i,y_j)\sim k^3$$

最后，将上式代入$Var(\hat{H}(t))$的计算式$(4,3,5)$式，可以得知：

$$Var(\hat{H}(t))\sim k^{-3}\to 0,(k\to\infty)$$

4.4 算法描述

现在，在离散、等时空点上观察某一随机过程$Y(t)$。

不妨将时间点限制在$[0,1)$区间上,样本大小为2^J，$t_i=(i-1)/n$，$n=1,2,\cdots,2^J$，$y_{j,k}(k=0,1,\cdots,2^{j-1},j=0,1,\cdots J-1)$为$WY(2^{-j},K2^{-j})$的一个估计值，后者是小波变换$WY(a,t)$在$a=2^{-j}$、$t=K2^{-j}$处的离散取值，采用带有M阶消失矩的Daubechies紧支小波基进行小波变换。

Step1：划分$[0,1)$为2^l个互不相交且等长的子区间I_m。

$$I_m=[(m-1)2^{-l},m2^{-l}),1\le l\le(J-1),m=1,2,\cdots,2^l$$

Step2：把$\hat{H}(t)$看成$H(t)$在相应子区间I_m上的平均值，$\hat{H}(t)$合适的时间点取在I_m的中点$2^{-l-1}(2m-1)$。

定义如下双变量集：

$$\{(X_m,Y_m)\}=\left\{\left[\log(2^{-j}),\log(|y_{j,k}|^2)\right]k2^{-j}\in I_m,0\le k\le 2^j-1,0<j\le J-1\right\}$$

在每一个I_m上 ，由(2.4)式估算$\hat{H}(t)$。

Step3：采用局部多项式来光滑估算值$\hat{H}(t)$，形成一条曲线。该曲线可看成是实际$H(t)$形状的一个逼近。

4.5 仿真模拟

下面我们对$GFBM$和$GFIN$两个模型利用上述算法进行仿真模拟。离散小波变换采用具有8阶消失矩的Daubechies最小非对称紧支小波基。选取Hurst指数函数$H(t)=3(t-0.5)^2+0.1$，$l=32$，$J=12$，$n=2^{12}$。

例 1：取$GFBM$模型$(4,2,4)$式中的$B_n(t_i)=\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{i}\varepsilon(t_i)$，$t_i=i-1/n$，$i=1,2,\cdots,n;$ $B_n(t_i)$可看成一个布朗运动。对于$(4,2,4)$式中两个积分用下边的和式

进行逼近。

$$Y_n(t_i)=\frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{k=-N}^{0}\left\{(t_i-u_k)^{H(t_i)-1/2}-(-u_k)^{H(t_i)-1/2}\right\}\varepsilon(u_k)+\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{i}(t_i-t_k)^{H(t_i)-1/2}\varepsilon(t_k)$$

其中 $u_k=\left(k/N\right)K,k=0,1,\cdots,-N$；　　$t_i=\left(i-1/n\right),i=1,2,\cdots,n$。

$\varepsilon(u_k)$、$\varepsilon(t_k)$均为 Guass 白噪音过程，$N\geq 0$为整数，$K\geq 0$为常数。

该例 GFBM 的样本轨道曲线见图 4.1 所示。图 4.2 是估计$\hat{H}(t)$和实际$H(t)$曲线的对比图，从图上可以看出$H(t)$和估计$\hat{H}(t)$平滑后的曲线两者基本吻合。

例 2：对于 GFIN 模型，我们采用下面的一个有限和式逼近。

$$X_n(t_i)=\sum_{k=0}^{N}a(t_i,k)\varepsilon(t_{i-k}),\quad t_i=\frac{(i-1)}{n}\quad,\quad i=1,2,\cdots,n$$

其中　$\varepsilon(t_{i-k})$为白噪声，系数$a(t_i,k)$由下式计算[ ]：

$$a(t_i,k)=\frac{\Gamma\left(k+\left\{H(t_i)-1/2\right\}\right)}{\Gamma(k+1)\Gamma\left(H(t_i)-1/2\right)}$$

部分和式 $Y_n(t_i)=1/\sqrt{n}\sum_{k=1}^{i}X_n(t_k)$是一个局部自相似性的随机过程。图 4.3 为和式的一个样本轨道。图 4.4 为估计$\hat{H}(t)$和实际$H(t)$的曲线，两者比较吻合。

4.6　时变 Hurst 指数在股票随机游动中的应用

股票市场是一个自由度极大的信息系统，在这一市场中证实一个股价运动趋势所需的确认信息的时间是不同的，对于信息的不均等的消化会导致一个有偏随机游动。Hurst 和 Mandebrot 俩人在二十世纪七十年代先后对这种现象作了全面深入的研究，并称其为分数布朗运动。这种分形特征结构的市场实际上会让现今许多诸如资本资产定价模型（CAPM）、套利定价模型（APT）、期权定价模型等数学模型（依赖正态分布或有限方差）屡次失灵，并赋予投资者市场定性决策方面循环、趋势等概念及可以度量的数量特征。其中 Hurst 指数这一分形统计量的强健性对于时间序列分析分类有着重要的用途，即使是非 Guass 型的随机分布也是可行的。该指数刻化了时间序列自相似性及序列发展的相关强度。但是以前人们大量的工作是假定该参数是一个常数。实际上，随着市场大系统非线性演化，过程的局部自相似行为会更多地体现出来，这就要求相应的 Hurst 指数应该是一时变函数 H(t)。与此同时，系统相关增量过程一般也是非平稳的。小波分析方法在

此发挥作用显然是理所当然的事情。

随着国家“九五”重大项目《金融数学、金融工程、金融管理》研究的进一步展开，小波分析将会在经济、金融领域发挥重要的作用。

本节选取从 1993 年 1 月 1 日至 2000 年 11 月 31 日上海股票市场周收盘指数的所有数据为样本，按照本文小波处理算法计算其时变 Hurst 指数，并和前人所用 ARFIMA 模型计算出的 H（常数值）相比较[103],[104]，从中可以更清楚地看出时变 Hurst 指数的演变在投资策略方面具有非常重要的指导意义。

上证周收盘指数共有 398 个数据，数据变化范围为 $[333.92,2093.2]$，全距为 1759.3。数据波动较大，呈现一尖峰分布（非高斯分布）。

当看成常数时，由 TSP 软件分析，得到 H=0.47，这表明自 1993 年以来周指数之间波动没有明显的长期依赖性。利用我们的算法及三次样条曲线拟合，从而得到时变 Hurst 指数的曲线，可以明显地看到，在股市不同波段中周指数依赖性都有不同的变化，这对实际的投资决策有着潜在的影响是不言而谕的。

图 4.5 为上证周指数折线图，图 4.6 则显示了时变 Hurst 指数变化曲线及传统方法计算的指数值图线。

4.7 本章小结

在这一章，我们提出了时变维数 $D(t)$ 的概念，通过分析时变 Hurst 指数 $H(t)$ 来实现这一目的($D(t)=2-H(t)$)。在定义了统计局部自相似过程之后，将时变指数 $H(t)$ 分别引入分数布朗运动(FBM)模型和分整自回归滑动平均(ARFIM)模型之中，对它们各自进行了拓展，成为典型的具有统计局部自相似性的随机过程。

由于拓展后的两个模型均具有非平稳的性质，文中借助 Daubechies 紧支小波变换，给出了时变指数估值 $\hat{H}(t)$ 的小波算法，并证明了估值 $\hat{H}(t)$ 和真实值 $H(t)$ 是一致相容性的。

最后，对于两个模型分别进行了仿真模拟，结果比较理想。另外，通过上海股价周收盘指数的时变指数 $\hat{H}(t)$ 的计算分析，本文认为，时变指数 $H(t)$ 的引入比原来常数指数 H 对于股票投资决策来说具有更好的指导作用。

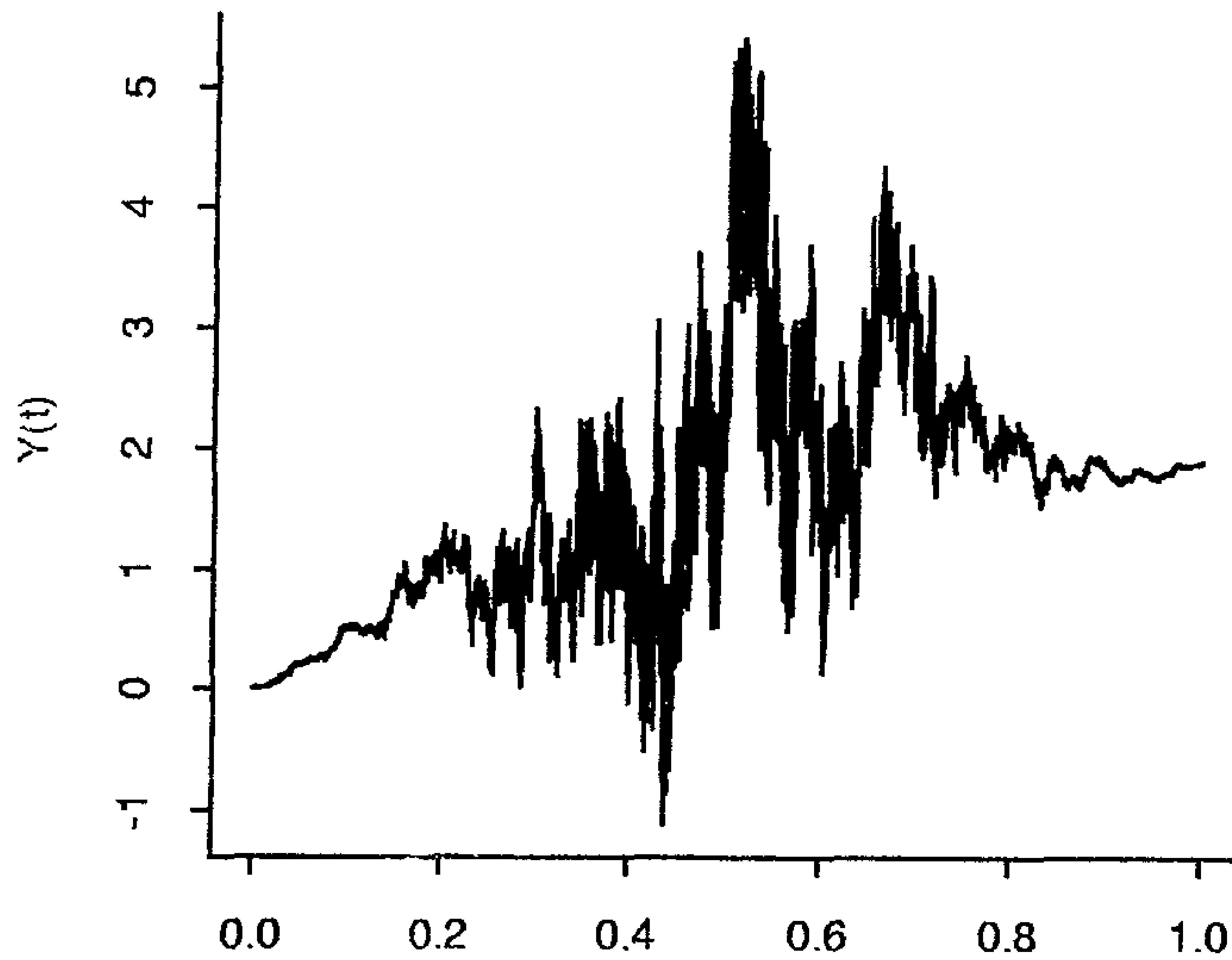


图 4.1　GFBM 的样本轨道曲线

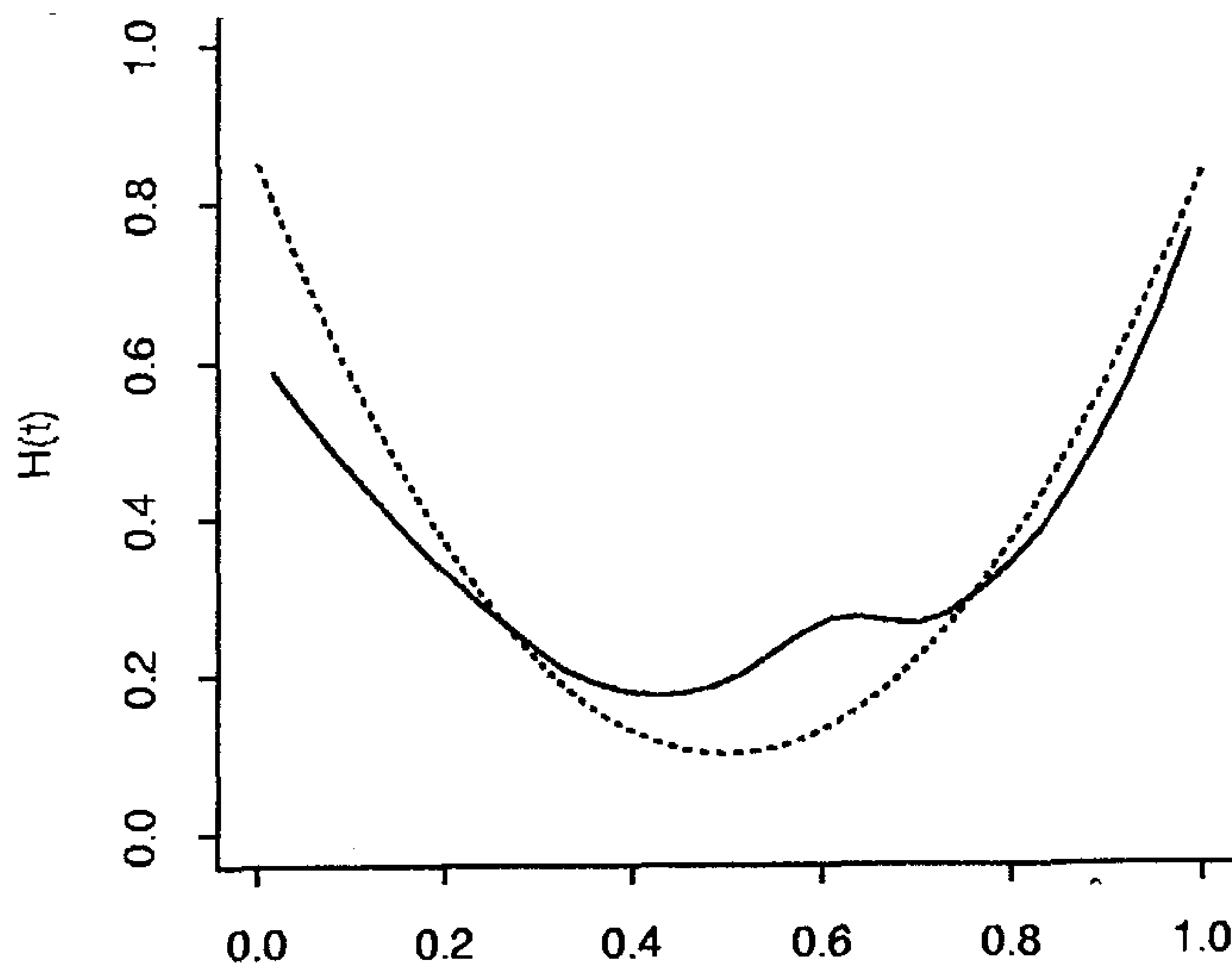


图 4.2　估计 $\hat{H}(t)$（实线）和实际 $H(t)$ 的曲线

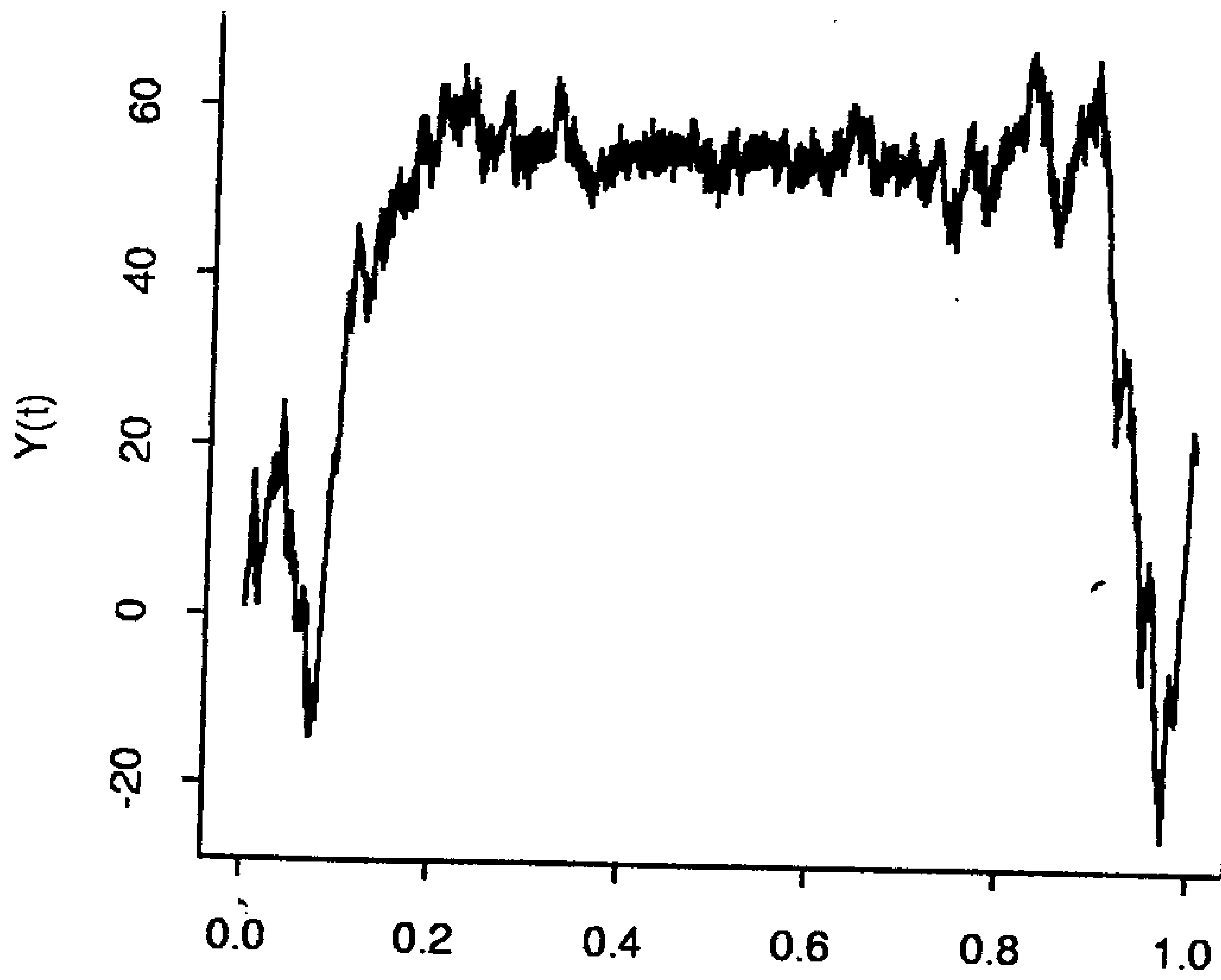


图 4.3 和式 $Y_n(t_i)$ 的一个样本轨道

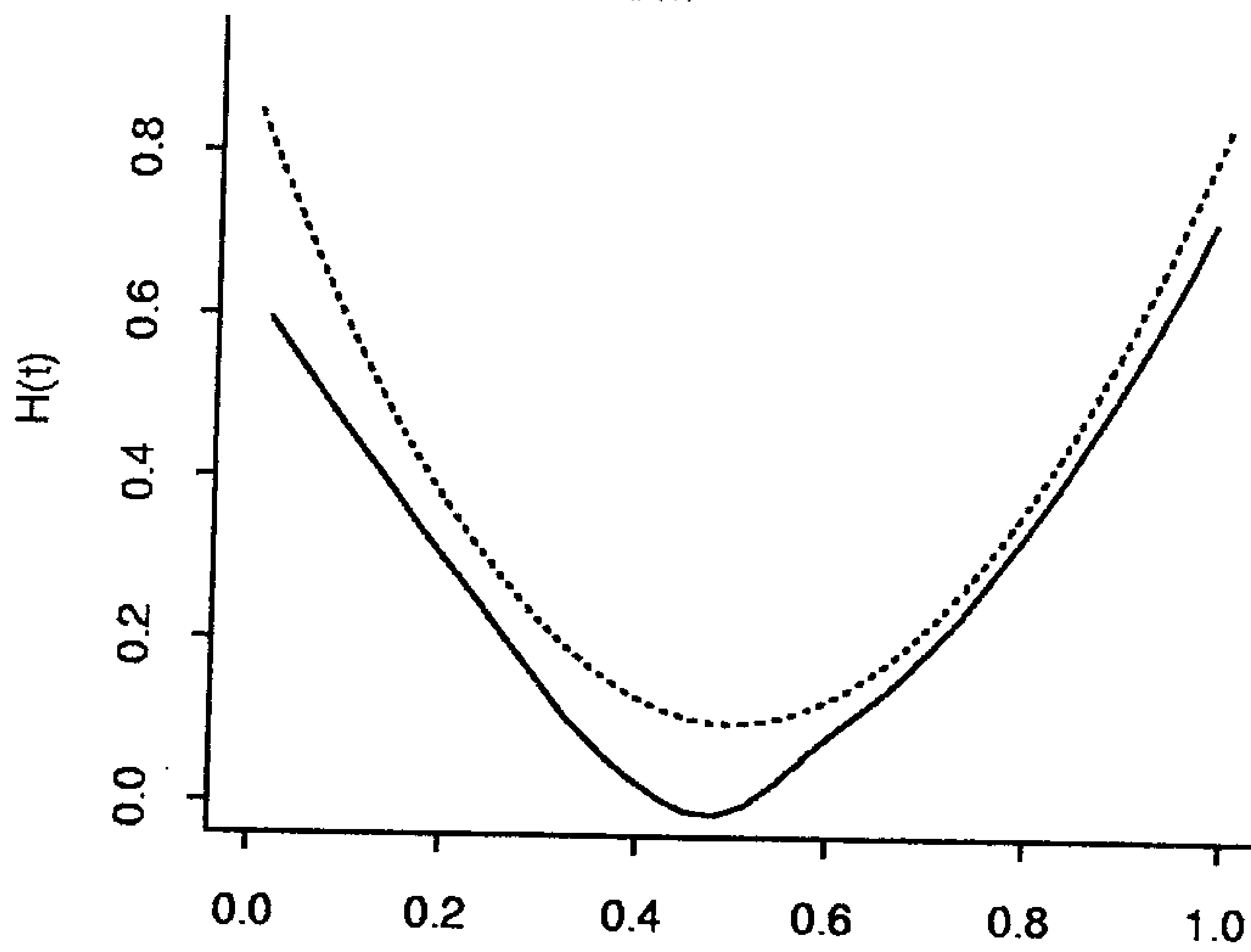


图 4.4 估计 $\hat{H}(t)$（实线）和实际 $H(t)$ 的曲线

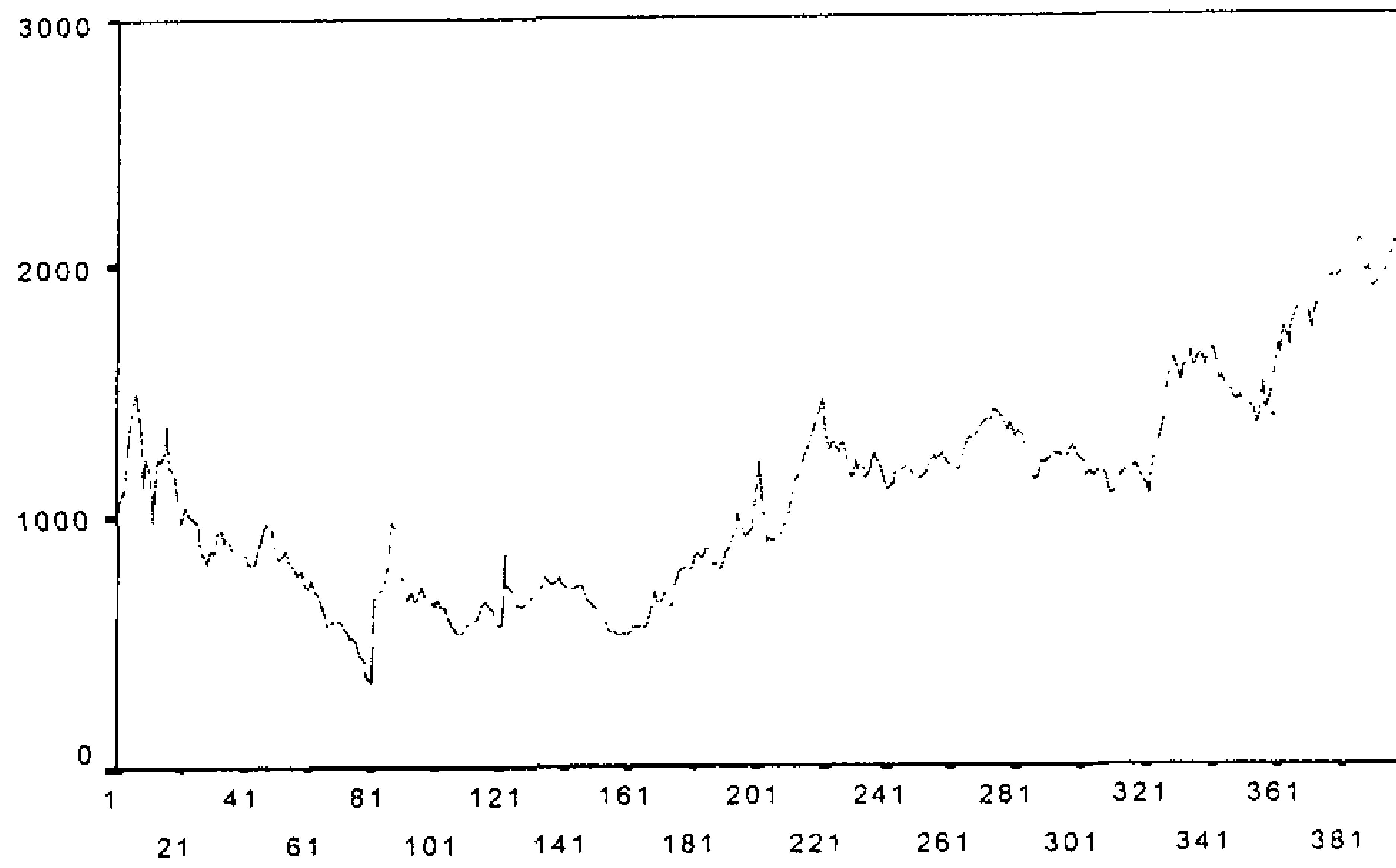


图 4.5　上证周指数折线图

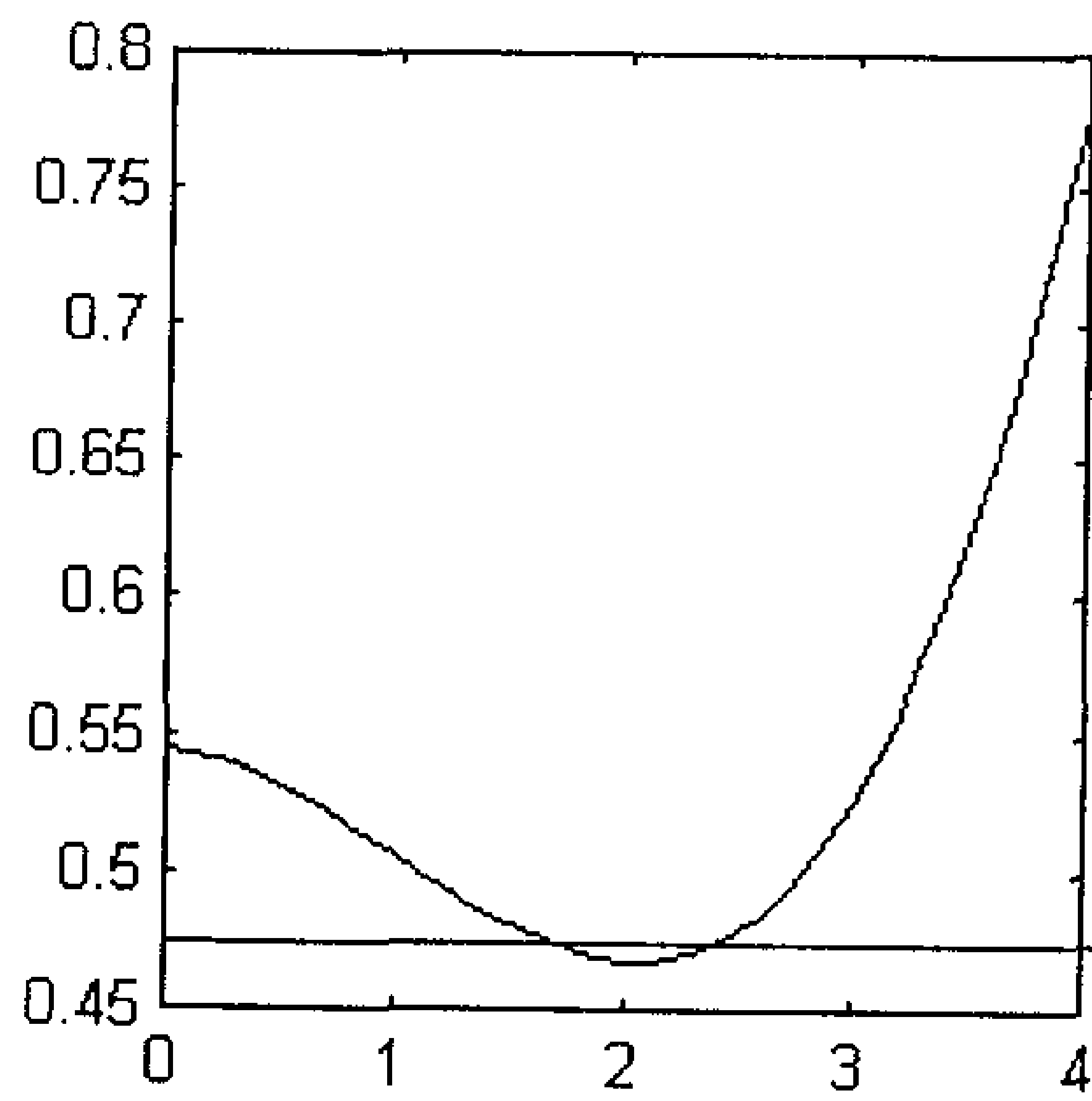


图 4.6　时变 Hurst 指数曲线及传统的指数值 H 图线

第五章 有关 $1/f$ 过程中谱参数估计的小波分析方法

5.1 引 言

分形最突出的特征是其在不同尺度下所表现的自相似性。统计自相似随机过程则是在概率分布(d)意义下满足自相似性：

$$f(t) \underset{(d)}{=} a^{-H} f(at)$$

在这个定义下，我们可以看到这个过程在均值、自相关函数及功率谱方面均呈现出自相似性，所以也就呈现出了分形的分维特征。

所谓 $1/f$ 过程就是一类功率谱具有如下形式的随机过程：

$$S_x(\omega) = \frac{\sigma_x^{\ 2}}{|\omega|^{\gamma}} \ , \ (\ \sigma_x^{\ 2} > 0 \ ), \qquad \gamma = 2H + 1$$

现实生活中，诸如真空及电子元器件中的噪音、股票指数的变化、生物心率跳动、网络流量等大量的自然现象都具有这类过程的特征。

对这种 $1/f$ 过程的刻画，Mandelbrot 等人从时域上提出分数布朗运动模型(FBM)和分数高斯噪声模型(FGN) 均基本上可以解释这一过程，但总的说来，由于 $1/f$ 过程的非平稳性，其处理方法较为复杂，对谱参数γ的选择也不近人意。与此同时，过程的非平稳性也为小波分析方法进入这一领域提供了合适的场所和机会。1992 年 G.Wornel [109]给出了刻画 $1/f$ 过程的小波模型，摆脱了 FBM 模型的局限性。有关 $1/f$ 过程谱参数估计问题，随后他提出了用极大似然估计方法估算γ参数的途径[111],[123]。

作极大似然估计要从观测值的似然函数，也就是从条件先验概率入手。

假设观测值$r(t)$、真值$x(t)$及噪音$w(t)$的关系为：$r(t) = x(t) + w(t)$， 其在尺度m下的小波变换后$r_n^{(m)} = d_n^{(m)} + w_n^{(m)}$，且有$Var\left[r_n^m\right] = \sigma_m^2 = \sigma^2 \beta^{-m} + \sigma_w^2$， $\beta = 2^{\gamma}$。G.Wornel1992 年在文中曾假设r_n^m是一个 Gauss 分布，得出似然函数为：

$$p\left(r/\theta\right) = \prod_{m,n \in Z} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_m^2}} e^{-\left(r_n^{(m)}\right)^2 / 2\sigma_m^2}$$

对数似然函数则为

$$\ln(p(\%_\theta)) = -\frac{1}{2}\sum_{m,n\in Z}\left[\frac{\left(r_n^{(m)}\right)^2}{\sigma_m^2}\right] + \ln\left(2\pi\sigma_m^2\right)$$

$$= -\frac{1}{2}\sum_{m\in\Lambda} N(m)\left[\frac{\hat{\sigma}_m^2}{\sigma_m^2} + \ln\left(2\pi\sigma_m^2\right)\right] \quad \cdots\cdots(5.1.1)$$

式中，Λ 是尺度序号的集合，$N(m)$ 是尺度 m 下的样本总数；

$\hat{\sigma}_m^2 = 1/_{N(m)}\sum_{k\in N(m)}\left(r_k^{(m)}\right)^2$ 则是尺度 m 下的样本方差。

对 $(5,1,1)$ 式分别对 $\beta,\sigma^2,\sigma_w^2$ 求导，并令所求的导数为零，从而得到一个非线性方程组：

$$\sum_{m\in\Lambda}\frac{N(m)}{\sigma_m^2}\left(1-\frac{\hat{\sigma}_m^2}{\sigma_m^2}\right)=0$$

$$\sum_{m\in\Lambda}\beta^{-m}\frac{N(m)}{\sigma_m^2}\left(1-\frac{\hat{\sigma}_m^2}{\sigma_m^2}\right)=0$$

$$\sum_{m\in\Lambda}m\beta^{-m}\frac{N(m)}{\sigma_m^2}\left(1-\frac{\hat{\sigma}_m^2}{\sigma_m^2}\right)=0$$

该方程组的求解可用文献[121]中提出的数值方法加以解决。

从以上过程可以看出，这种方法要求人们在使用该法之前要知道随机过程的概率分布函数，应用起来带有许多分布假设的成分，这是其不足之处。

通过对 $1/f$ 过程的小波变换特征的研究，本文欲借助小波变换对统计自相似过程所起的白化作用及最小二乘法，建立起在无须知道样本概率分布情况下的谱参数估计方法。

本章所做的具体工作是围绕以下几个方面展开的：

在第二节里，文中探讨了 $1/f$ 过程的频域表征及其非平稳性；随后，在第三节着重就有关 $1/f$ 过程小波变换系数之间的尺度相关性及小波函数消失矩对系数相关性衰减的影响进行了详细的讨论；基于最小二乘法的谱参数的估算安排在第四节进行；文章的最后用算例加以模拟验证。

5.2 $1/f$ 过程的频域表征及其非平稳性

设一个统计自相似过程$x(t)$（功率有限）的自相关函数为$R_x(\tau)$，功率谱为$S_x(\omega)$，其相互之间的关系是：

$$R_x(\tau)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{+T}x(t)x(t+\tau)dt\ ,\quad R_x(\tau)=a^{-(2H+1)}R_x(a\tau)$$

$$S_x(\omega)=\int R_x(\tau)e^{-i\omega\tau}d\tau=a^{-(2H+1)}\int R_x(\tau')e^{-i\omega/a\,\tau'}d\tau'\quad(\tau'=a\tau)$$

$$=a^{-(2H+1)}S_x\left(\frac{\omega}{a}\right)$$

$$=a^{2H+1}S_x(a\omega)$$

由此可以推知： $S_x(\omega)=\sigma_x^2/|\omega|^{2H+1}$，（$\sigma_x^2$为$x(t)$的方差）。

令 $\gamma=2H+1$， 则 $S_x(\omega)\propto 1/|\omega|^{\gamma}$，$\gamma$为自相似参数。

上式表明$x(t)$的功率谱具有分维谱特征。

$S_x(\omega)$的非平稳性体现在以下两个方面：一方面，当$\gamma\geq1$时，ω愈小，则$S_x(\omega)$就会愈大，说明低频成分丰富，但当$\omega\to0$时，$S_x(\omega)\to\infty$，从而造成所谓的“红外灾难”；另一方面，当$\gamma<1$时，ω愈大，则$S_x(\omega)$将愈大，当$\omega\to\infty$时，就会有$S_x(\omega)\to\infty$，又造成所谓的“紫外灾难”。为了避免这种两极现象的发生，有必要在频域上采取一些限制条件，对$1/f$过程加以定义。

定义 5.2.1 一个广义自相似的随机过程称为一个$1/f$过程是指：

设有理想带通滤波器 $H(\omega)=\begin{cases}1 & \omega_0<\omega<\omega_1\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$

如果存在ω_0和$\omega_1(0<\omega_0<\omega_1<\infty)$，使得当$x(t)$作为输入过程通过一个具有频率响应的理想带通滤波器$H(\omega)$后，其输出$y(t)$是具有有限方差的广义平稳随机过程。

可以证明，具有$\frac{\sigma_x^2}{|\omega|^{\gamma}}$形式的$1/f$过程$x(t)$经上述$H(\omega)$处理后，能产生广义平稳的随机过程$y(t)$，其功率谱$S_y(\omega)$满足：

$$S_y(\omega)=\begin{cases}\dfrac{\sigma_x^2}{|\omega|^2} & \omega_L<|\omega|<\omega_H\\ 0 & 其它\end{cases}$$

5.3 $1/f$ 过程的小波变换在相关结构上的特点

设 $x(t)$ 是谱特性为 $\frac{\sigma_x^2}{|\omega|^\gamma}$ 的 $1/f$ 过程，$\psi(t)$ 具有 R 阶消失矩的母小波函数，$x(t)$ 在二进制小波变换下的系数为 $d_n^{(m)}$，即就是

$$\int_{-\infty}^{+\infty}x^k\psi(t)dt=0\,,\ (0\le k\le R),\qquad d_n^{(m)}=\langle x(t),\psi_{m,n}\rangle=2^{-m/2}\int\psi(2^{-m}t-n)dt$$

设采样数率为 T_s，对某一信号 $x(t)$ 的采样序列 $a_n^0=x(nT_s)$，可看作是尺度 $m=0$ 的对 $x(t)$ 的近似。当 $m>0$ 时，a_n^m 和小波系数 $d_n^{(m)}$ 之间有下面的递推关系式：

$$a_n^m=\sum_k h_{2n-k}a_k^{m-1}$$

$$d_n^{(m)}=\sum_k g_{2n-k}a_k^{m-1}$$

上式中 h_n 和 g_n 分别为尺度函数 $\varphi(x)$ 和小波函数 $\psi(x)$ 对应的滤波系数。

由 Mallat 重构算法得到：

$$a_n^m=\sum_k h_{n-2k}a_k^{m+1}+g_{n-2k}d_k^{(m+1)}$$

下面探讨任意两个小波变换系数 $d_n^{(m)}$ 和 $d_n^{(m')}$ 之间的相关性：

$$\begin{aligned}E\left[d_n^{(m)}d_n^{(m')}\right]&=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}E\left[\psi_{m,n}(t)x(t)x(t')\psi_{m',n'}(t')\right]dtdt'\\&=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\psi_{m,n}(t)R_x(t-t')\psi_{m',n'}(t')dtdt'\\&=\int_{-\infty}^{+\infty}\psi_{m,n}(t)\left[R_x(t)*\psi_{m',n'}(t)\right]dt\end{aligned}$$

利用 Parcival 定理可知上式可化为

$$\begin{aligned}E\left[d_n^{(m)}d_n^{(m')}\right]&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sigma_x^2}{|\omega|^\gamma}\left[2^{-\frac{m}{2}}\Psi(2^{-m}\omega)e^{-in2^{-m}\omega}\right]\left[2^{-\frac{m'}{2}}\Psi^*(2^{-m'}\omega)e^{in'2^{-m'}\omega}\right]d\omega\\&=\frac{2^{-\frac{1}{2}(m+m')}}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sigma_x^2}{|\omega|^\gamma}\Psi(2^{-m}\omega)\Psi^*(2^{-m'}\omega)e^{-i\left(n2^{-m}-n'2^{-m'}\right)\omega}d\omega\qquad\cdots(5.3.1)\end{aligned}$$

由上式可得到以下结论：

1．小波系数$d_n^{(m)}$的均值为零，方差$Var\left[d_n^{(m)}\right]$为$\sigma^2 2^{-m\gamma}$。

由于小波函数$\psi(t)$满足$\int_{-\infty}^{+\infty}\psi(t)dt=0$，因此小波系数$d_n^{(m)}$的均值为零。

在(5.3.1)中令$m=m^{'},n=n^{'}$，于是方差为：

$$E\left[d_n^{(m)}\right]^2=Var\left[d_n^{(m)}\right]=\frac{2^{-m}}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sigma_x^{(m)}}{|\omega|^{\gamma}}\left|\Psi\left(2^{-m}\omega\right)\right|^2 d\omega$$

$$=\sigma^2 2^{-m\gamma} \qquad \cdots\cdots(5.3.2)$$

这里，$\sigma^2=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sigma_x^2}{|\omega|^{\gamma}}\left|\Psi(\omega)\right|^2 d\omega$

利用这一结论将(5.3.1)式进行归一化，归一化的相关系数为：

$$\rho\left(n,n^{'};m,m^{'}\right)=\frac{E\left(d_n^{(m)},d_{n^{'}}^{(m^{'})}\right)}{Var\left(d_n^{(m)}\right)Var\left(d_{n^{'}}^{(m^{'})}\right)}$$

$$=\frac{\sigma_x^2 2^{-\frac{1}{2}\left(m+m^{'}\right)}}{\sigma^2 2\pi 2^{-\frac{1}{2}\left(m+m^{'}\right)\gamma}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\Psi\left(2^{-m}\omega\right)\Psi^*\left(2^{-m^{'}}\omega\right)}{|\omega|^{\gamma}}e^{-i\left(n2^{-m}-n^{'}2^{-m^{'}}\right)\omega}d\omega$$

$$=\frac{\sigma_x^2}{\sigma^2}\frac{2^{-\frac{1}{2}\left(m+m^{'}\right)(1-\gamma)}}{\pi}\int_{0}^{+\infty}\frac{\Psi\left(2^{-m}\omega\right)\Psi^*\left(2^{-m^{'}}\omega\right)}{\omega^{\gamma}}\cos\left[\left(n2^{-m}-n^{'}2^{-m^{'}}\right)\omega\right]d\omega$$

$$\cdots\cdots(5.3.3)$$

2．当$m=m^{'}$时（同一尺度）归一化相关系数是$\left(n-n^{'}\right)$的函数

在(5.3.3)式中，令$m=m^{'}$，得到

$$\rho\left(n,n^{'};m\right)=\frac{\sigma_x^2}{\sigma^2}\frac{2^{-m(1-\gamma)}}{\pi}\int_{0}^{+\infty}\frac{\left|\Psi\left(2^{-m}\omega\right)\right|^2}{\omega^{\gamma}}\cos\left[2^{-m}\left(n-n^{'}\right)\omega\right]d\omega$$

$$=\frac{\sigma_x^2}{\sigma^2}\frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty}\frac{\left|\Psi(\omega)\right|^2}{\omega^{\gamma}}\cos\left[\left(n-n^{'}\right)\omega\right]d\omega$$

上式表明：在固定尺度下，小波系数$d_n^{(m)}$是广义平稳的随机序列。

3．在不同尺度下同一时刻的小波变换，归一化相关系数为$\left(m-m^{'}\right)$的函数在(5.3.3)式中，令$n2^{-m}=n^{'}2^{-m^{'}}$，这样就得到

$$\rho\left(n,n^{'};m,m^{'}\right)=\frac{\sigma_x^2}{\sigma^2}\frac{2^{-\frac{1}{2}\left(m+m^{'}\right)(1-\gamma)}}{\pi}\int_{0}^{+\infty}\frac{\Psi\left(2^{-m}\omega\right)\Psi^*\left(2^{-m^{'}}\omega\right)}{\omega^{\gamma}}d\omega$$

$$=\frac{\sigma_x^2}{\sigma^2}\frac{2^{-\frac{1}{2}(m+m')(1-\gamma)}}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\Psi\left(2^{-(m-m')}\omega\right)\Psi^*(\omega)}{\omega^\gamma}d\omega$$

该式表明：$\rho(n,n';m,m')$与采样时刻的值没有关系。

4．小波函数 R 阶消失矩对小波系数相关性的影响。

（1） 为确保$Var\left(d_n^{(m)}\right)$为一个有限数值，$R$ 必须满足 $R\geq\frac{\gamma}{2}$

证明：由于，$\Psi(\omega)=\omega^R\Psi_0(\omega)$，$(\Psi_0(0)\neq 0)$

$$\sigma^2=\frac{\sigma_x^2}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\omega^{2R}}{|\omega|^\gamma}|\Psi_0(\omega)|^2d\omega$$

$$=\frac{\sigma_x^2}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}|\omega|^{2R-\gamma}|\Psi_0(\omega)|^2d\omega$$

上式中只有当$\gamma\leq 2R$时，σ^2才是有限的。

（2）在同一尺度下，归一系数ρ值随着$(n-n')$增大而衰减，这种衰减量级为$(n-n')^{-(2R-\gamma)}$。

证明：在$(5.3.3)$中，令$m=m'$，于是有下式成立

$$\rho(n,n';m,m')=\frac{\sigma_x^2}{\sigma^2}\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{|\Psi(\omega)|^2}{\omega^\gamma}\cos[(n-n')\omega]d\omega$$

$$=\frac{\sigma_x^2}{\sigma^2}\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}|\omega|^{2R-\gamma}|\Psi_0(\omega)|^2\cos[(n-n')\omega]d\omega$$

利用分步积分法可知，$\rho(n,n';m)$随着$(n-n')$的增大而减小，衰减率为$(n-n')^{-(2R-\gamma)}$数量级。而且还可以看到，小波函数消失矩R越大，相关系数ρ衰减就越快。这一结论给我们最大的启示是，可以近似地将小波变换系数$d_n^{(m)}$看成是一个白噪声序列。

5.4 基于小波系数方差结构的γ参数估算

对于具有功率谱$\frac{\sigma_x^2}{|\omega|^\gamma}$的$1/f$过程的一个样本函数$x(t)$进行采样，利用离散小波变换处理。不妨设选用的膨胀尺度为m，对应的小波系数个数为$N(m)$。

由于小波系数之间的相关性较小，可以忽略不计。对于尺度m，小波系数的方差$Var\left[d_n^{(m)}\right]$可以估计为：

$$\hat{\sigma}_m^2 = \frac{1}{N(m)}\sum_{n=1}^{N(m)}\left(d_n^{(m)}\right)^2$$

又由(5.3.2)式知： $Var\left[d_n^{(m)}\right] = \sigma^2 2^{-m\gamma}$

建立回归方程： $\hat{\sigma}_m^2 = \sigma^2 2^{-m\gamma}$

两边取对数得到下面的线性回归方程

$$f_m = g - m\gamma$$

记号 $f_m = \log_2^{\hat{\sigma}_m^2}$， $g = \log_2^{\sigma^2}$

令 $P(g,\gamma) = \sum_{m=1}^{M}\left(f_m - g + m\gamma\right)^2$

于是 g 和 γ 的最小二乘法估计是使 $P(g,\gamma)$ 最小的 $\hat{g}$、$\hat{\gamma}$。

即 $P(\hat{g},\hat{\gamma}) = \underset{g,\gamma}{Min}\, P(g,\gamma)$

由多元函数极值定理知，$\hat{\gamma}$ 和 $\hat{g}$ 是下列方程的解：

$$\frac{\partial P}{\partial g} = \sum_{m=1}^{M}\left(f_m - g + m\gamma\right) = 0$$

$$\frac{\partial P}{\partial \gamma} = \sum_{m=1}^{M} m\left(f_m - g + m\gamma\right) = 0$$

功率谱参数的估计值为：

$$\hat{\gamma} = \frac{12\sum_{m=1}^{M} m f_m + 6(M+1)\sum_{m=1}^{M} f_m}{M\left(1-M^2\right)}$$

5.5 算例仿真

对于 $\gamma = 1.67$ 的 $1/f$ 过程（见图 5.1），采集样本个数 $N = 2^{10}$，选用具有 4 阶消失矩的 Daubechies 小波基估算 $\hat{\gamma}$，仿真结果见下表 5.1 及图 5.2 所示。

表 5.1

真值 γ	估值 $\hat{\gamma}$	绝对误差	相对误差
1．67	1．65	0．02	1．2%

从结果来看，本文中的方法是有效的。

5.6 本章小结

在本章中，我们首先在频域中描述了 $1/f$ 过程的特征，并着重探讨了 $1/f$ 过程经过小波变换后小波系数在相关结构上的特点，有关结论主要有：

（1）在小波的同一尺度 m 变换下，归一化相关系数是 $(n-n')$ 的函数，表明小波系数 $d_n^{(m)}$ 是一个广义平稳的随机序列。

（2）在不同变换尺度下的同一时刻（$n2^{-m}=n'2^{-m'}$），归一化相关系数为 $(m-m')$ 的函数，与采样时刻的值没有关系。

（3）小波的消失矩越大，小波系数的相关性衰减就越快。

关于 $1/f$ 过程谱参数 γ 的估计问题，基于 $1/f$ 过程的小波模型，G.Wornell 提出了用极大似然方法估算 γ 参数的途径，但存在着须预先知道过程的分布函数的不足之处。从上述的相关性分析可以看出，小波变换对于自相似过程具有白化作用，以此为出发点，本章提出了无须知道分布的情况下谱参数 γ 的一种估计方法。

最后，利用一个仿真结果对该方法加以验证，说明此法是有效的。

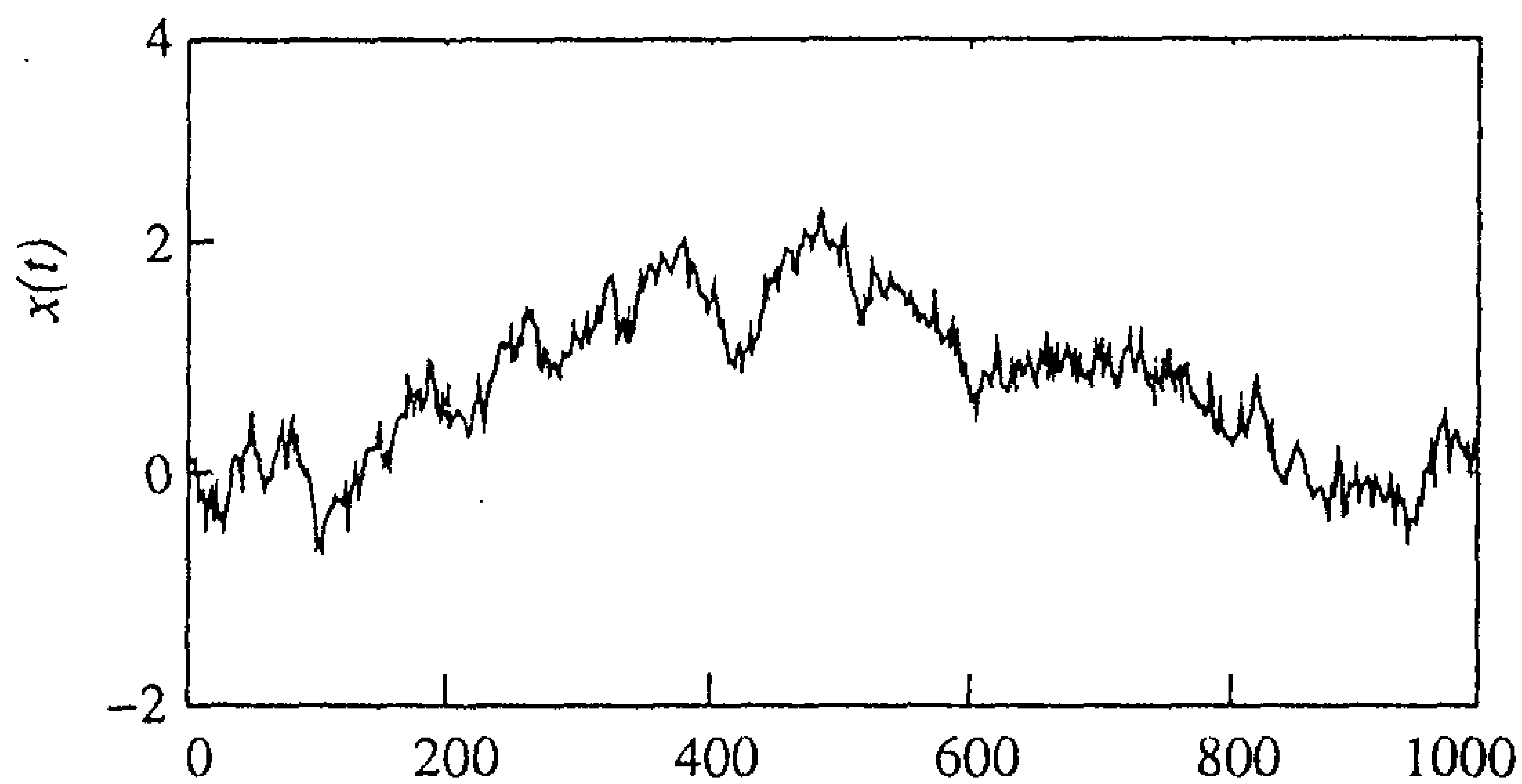


图 5.1 $\gamma=1.67$ 的原始 $1/f$ 过程

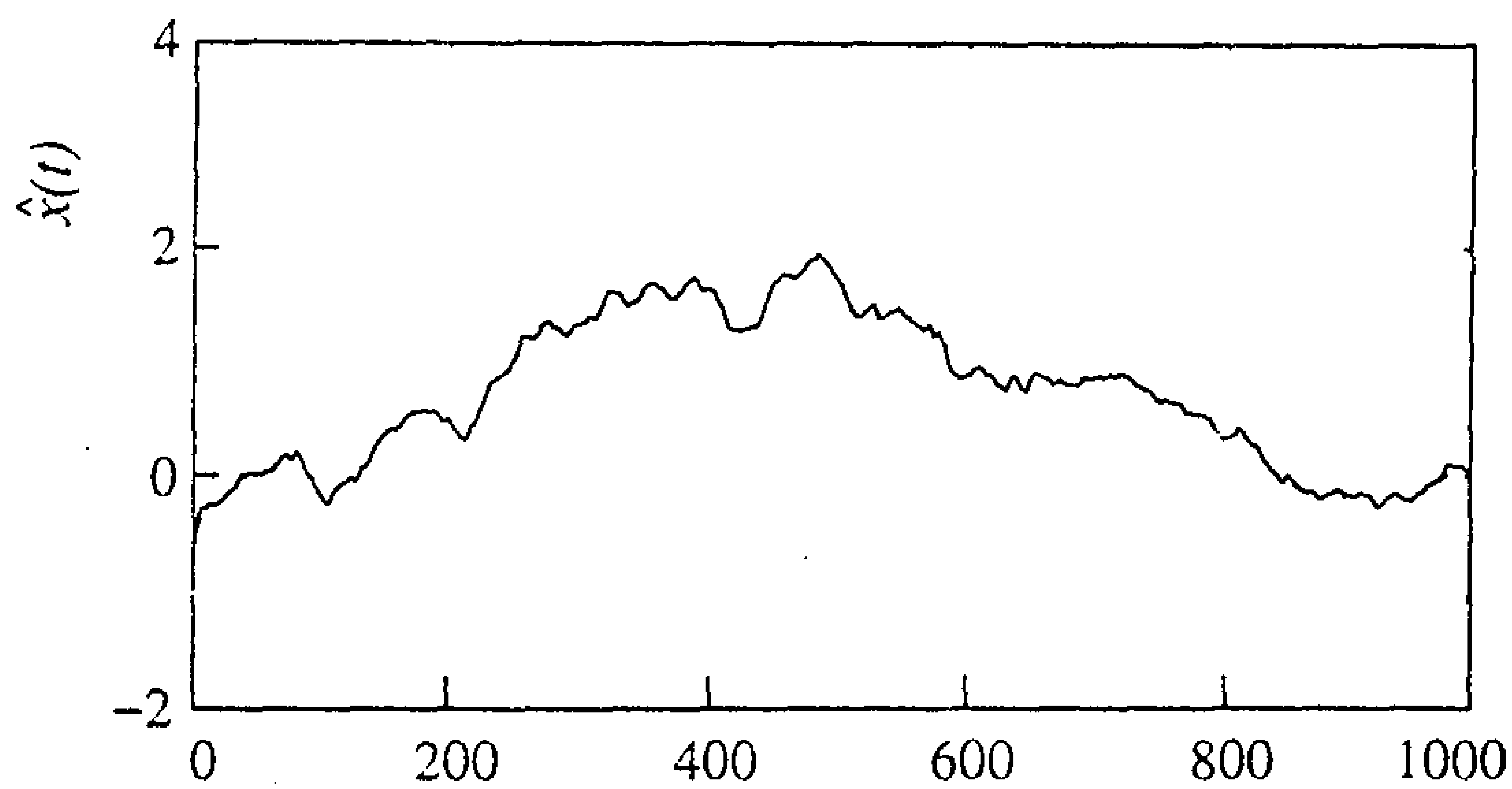


图 5.2 估算值 $\hat{\gamma}=1.65$

第六章 多重分形分维谱的奇异性及其小波分析

6.1 引言

在研究复杂分形（如混沌现象等）的过程中，人们发现仅用一个分形维数来描述非线性动力学演化过程中产生的形体显然是不够的。不同的局域条件或由参量涨落的波动均会造成形体形态方面的差异。为了弄清楚在分形形成过程中局部条件的作用及分形参量在空间的分布问题，人们提出了多重分形(multifractal)的概念（也叫分形测度）。早在 1974 年 Mandelbrot 就首先指出，在流体发生湍流时出现了多重标度特性，“自然界的分形几何学”一书中，他用“非间隙的”(non-lacunary)以此来描述这一现象[1]。随后，Grassberg 等人在 1983 年研究奇异吸引子时发展了这一概念，并提出现今使用的一些数学公式。Halsey 等人[48]则在 1986 年应用这一理论研究了有限扩散凝聚(DLA)集团的分形生长问题。我国学者段虞荣和颜新祥 1995 年[25]曾尝试将多重分形的多标度性与小波变换良好的局部分析性质相结合，在预测油气田储量及勘探井位的应用方面获得了令人满意的成功。近来，Rudolf.H.等人提出了一个多重分形的小波模型来解决网络流量问题[105]。总之，多重分形在解决实际问题中发挥着重要的作用，并且小波工具也已经开始进入多分形的研究领域。

概括起来说，多重分形外观上看是不同无标度区的集合，它将多个维数汇成一个系统——分形谱函数，主要研究分形测度（物理量）在支集上的分布情况。具有紧支集的小波在空间是局部支撑的，因此可以利用小波分析解决多重分形谱的局部细化和奇异性变化问题。在这方面，Mallat 和 Hwang 在 1992 年利用小波变换模极大值法开创了研究信号（包括分形信号在内）的局部奇异性行为的先河[65]，为以后人们专门研究多分形谱的奇异性提供了理论研究的线索和思路。

在前人已有多重分形理论的基础上，本章探讨了如何应用小波变换处理有关多分形谱的奇异性问题，其主要工作和创新之处包括在以下几个方面：

首先在第二节介绍了目前描述多分形的两套语言——$\alpha - f(\alpha)$语言和$q - D_q$语言及两者的等价性。在第三节中，在 Mallat 和 Hwang 用小波模极大值对分形信号进行奇异性分析的基础上，以高斯函数作为母小波，提出了一种跟踪每一条小波模极大值线的算法，从而避免了大量的数值运算。为了更进一步解决奇异点附近可能存在的一些拓扑问题，文中第四节采用了两个多项式函数作为芽函数探讨了小波变换极大值线的拓扑结构。本章第五节提出了基于小波变换模极大值方法计算多重分形

谱的一种方法。本章的最后采用了两个范例，其一用于说明分形测度奇异性和普通信号奇异性的不同之处，这是探讨跟踪问题的必要所在；其二用于解释多分形谱的计算。

6.2 多重分形的两类描述语言

6．2．1 $\alpha - f(\alpha)$语言

设x为拓扑维数为d的任一支集，μ是x上的一个测度。对于(x,μ)做适当的迭式划分，α是和划分有关的参数。第n步划分后具有相同测度μ_α的单元构成的支集为$x_n(\alpha)$。

若$\lim\limits_{n\to\infty} x_n(\alpha) = x_\alpha$是一个分形集，则称$x_\alpha$为$(x,\mu)$的一个分形支集（如*Cantor*集中的三分*Cantor*集情形）。于是一个多重分形可表示为具有不同维数的分形子集x_α的并集。

若单元测度μ_α与单元的尺度之间满足幂律关系：$\mu_\alpha \sim \varepsilon^\alpha$，则称$\alpha$为*Hölder*指数。因为$\alpha$控制着测度$\mu_\alpha$的奇异性，$\alpha$也叫奇异性指数。

对于上述x_α的任意δ－覆盖$\{U_i\}_{i\in N}$，当$0 < diamU_i \le \delta$时，引入以下记号：

$$H_\delta^r(x_\alpha,\mu_\alpha) = \inf\left\{\sum_{i=1}^{\infty}(diamU_i)^r : x_\alpha \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i\right\}$$

类似 Hausdorff 测度的定义，定义x_α的r维测度为：

$$H^r(x_\alpha,\mu_\alpha) = \lim_{\delta\to 0} H_\delta^r(x_\alpha,\mu_\alpha)$$

若存在临界指数$f(\alpha)$，使得

$$H^r(x_\alpha,\mu_\alpha) = \begin{cases} 0 & r > f(\alpha) \\ \infty & r < f(\alpha) \\ \text{有限正数} & r = f(\alpha) \end{cases}$$

则称$f(\alpha)$为多重分形在 Hausdorff 测度下的奇异性谱，即就是由不同α组成的序列构成的谱。

由上述定义可知，$f(\alpha)$就是分形支集x_α的 Hausdorff 维数。

$$f(\alpha) = \inf\left\{r : \liminf_{\delta\to 0} \sum_{i=1}^{\infty}(diamU_i)^r = 0\right\}$$

$$=\sup\left\{r:\liminf_{\delta\to 0}\sum_{i=1}^{\infty}(diamU_i)^r=\infty\right\}$$

当上述覆盖$\{U_i\}_{i\in N}$是尺度为ε的盒子时，若$[\alpha,\alpha+d\alpha]$内测度为μ_α的盒子数为$N(\alpha)$，则有下式成立：

$$H_\varepsilon^r(x_\alpha,\mu_\alpha)=N(\alpha)\varepsilon^r$$

当$N(\alpha)\sim\varepsilon^{-f(\alpha)}$时，$H_\varepsilon^r(x_\alpha,\mu_\alpha)$有有限值。此时$f(\alpha)=-\lim_{\varepsilon\to 0}\ln N(\alpha)/\ln\varepsilon$

6.2.2 $q-D_q$语言

下面从信息论的角度给出另一套描述多重分形的参量。

设测度支集x经过迭代或划分后的单元为$\{\Delta_i\}$，概率测度为μ。第i单元的概率定义为P_i：

$$P_i=\int_{\Delta_i}d\mu(x)$$

当$P_i>P_j$，且$q>>1$时，有$P_i^q>>P_j^q$成立。定义μ的q阶矩为：

$$N(q,\varepsilon)=\sum_i P_i^q(\varepsilon)$$

此时广义r维测度为：

$$M_\varepsilon^r(q)=\sum_i P_i^q(\varepsilon)\cdot\varepsilon^r=N(q,\varepsilon)\varepsilon^r$$

$$M^r(q)=\lim_{\varepsilon\to 0}M_\varepsilon^r(q)$$

若存在依赖于P_i的q阶矩所选择的临界指数$\tau(q)$，使得

$$M^r(q)=\begin{cases}0 & r>\tau(q)\\ \infty & r<\tau(q)\\ \text{有限正数} & r=\tau(q)\end{cases}$$

则称$\tau(q)$为质量维数。由μ的q阶矩，定义广义Reny的q次信息维如下式：

$$D_q=\begin{cases}\dfrac{1}{q-1}\lim_{\varepsilon\to 0}\ln N(q,\varepsilon)/\ln\varepsilon & (q\neq 1)\\ \lim_{\varepsilon\to 0}\sum_i P_i\ln P_i(\varepsilon)/\ln\varepsilon & (q=1)\end{cases}$$

6.2.3 $\alpha-f(\alpha)$语言和$q-D_q$语言的等价性

D_q和$\tau(q)$有如下关系：

$$D_q=\begin{cases}\tau(q)/(1-q) & q\neq 1\\ -\tau'(1) & q=1,\text{且}\tau(q)\text{可微}\end{cases}$$

若$\tau(q)$和$f(\alpha)$均可微时，可实施如下的 Legender 变换：

$$f[\alpha(q)]=q\alpha(q)+\tau(q)$$

$$\alpha(q)=-d\tau(q)/dq$$

于是得到

$$D_q=\{q\alpha(q)-f[\alpha(q)]\}/q-1$$

$$\alpha(q)=d[(q-1)D_q]/dq$$

$$f(\alpha)=q\alpha-[q(\alpha)-1]D_{q(\alpha)}$$

从上述推导的过程可见，在已知$q-D_q$的情况下，另一套参量$\alpha-f(\alpha)$就可由上面两个式子求出。

6.3 多重分形奇异谱结构的小波分析

6．3．1 前人有关奇异性的局部刻画的工作

一个函数（分布）在某一点x_0处的奇异性可以用其 *Hölder* 指数$h(x_0)$来描述。$h(x_0)$越大，$f(x)$在x_0处就越正规。若$n<h(x_0)<n+1$，那么我们就称$f(x)$是n次（而非$n+1$次）可微。传统方法是分析$f(x)$的 Fourier 变换$\hat{f}(\omega)$当$\omega\to\infty$时的渐近衰减情况。由于 Fourier 变换缺乏空间局部性，此时这种渐近衰减只反映了有关区间上发生奇异性的整体“宏观”信息，而难以确定其奇点的空间分布。

相比之下，小波分析则可提供有关奇异性的局部信息。

（1）Argoul.F.,Aneodo.A.和 Bacry 等人在 90 年前后用小波方法开展对分形测度性质进行分析，发现分形测度的小波变换与局部尺度指数之间存在有下面的一个幂律关系：

假设以x为中心、ε为长度的区间$I(x,,\varepsilon)$的分形测度为μ，且满足表达式：

$$\mu[I(x_0,\lambda\varepsilon)]=\lambda^{\alpha(x_0)}\mu[I(x_0,\varepsilon)]$$

其小波变换定义为：

$$W_\psi(a,b)=a^{-n}\int\psi^*\left(\left(x-b\right)/_a\right)d\mu(x)$$

其中a^{-n}为归一化因子，ψ^*为小波函数ψ的复共轭。

则有下述结论成立：

$$\begin{aligned}W_\psi(\lambda a,x_0+\lambda b)&=\frac{1}{(\lambda a)}\int\psi\left(\frac{x-x_0-\lambda b}{\lambda a}\right)d\mu(x)\\&=\frac{1}{(\lambda a)^n}\int\psi\left(\frac{x'-\lambda b}{\lambda a}\right)d\mu(x'+x_0)\quad(x'=x-x_0)\\&=\frac{1}{(\lambda a)^n}\int\psi\left(\frac{x''-b}{a}\right)\lambda^{\alpha(x_0)}d\mu(x_0+x'')\\&\sim\lambda^{\alpha(x_0)-n}W_\psi(a,x_0+b)\quad(\lambda\to0^+)\end{aligned}$$

这里$\alpha(x_0)$是分形测度$\mu(x)$在x_0处的局部尺度指数（*Hölder* exp*onent*）

（2）为了分析信号局部的奇异行为，Mallat 和 Hwang 引入小波变换模极大值分解方法，此法可用来定量描述分形信号的奇异性[65]。

为了刻画在某点（而不是某区间）的奇异性，设$\psi(x)$是有紧支撑的的n次连续可微的小波函数，且具有n阶消失矩，有如下定理：

定理：令$n\in N$，$\alpha(x_0)$为小于n的非整数值，分形测度函数$\mu(x)\in L^2(\Re)$。若$\mu(x)$在点x_0是 Lipschitz$\alpha(x_0)$的。则存在一常数$K>0$，使得对于x_0邻域内的所有点和任意尺度a，分形测度的小波变换满足

$$|W_a\mu(x)|\le Ka^{\alpha(x_0)}$$

或存在常数$K'>0$，使得对于x_0邻域内的所有点和任意尺度a，分形测度的小波变换满足

$$|W_a\mu(x)|\le K'\left(a^{\alpha(x_0)}+\frac{|x-x_0|^{\alpha(x_0)}}{|\log|x-x_0||}\right)$$

但在实际计算中应用上述定理是相当困难的，因为需在$U(x_0,\varepsilon)$的二维(a,x)空间上搜索$|W_a\mu(x)|$的衰减性，除非所有奇异性有相同的指数$\alpha(x_0)$，否则，这需要大量的计算量。

若对于$\forall x\in U(x_0,\varepsilon)$，有$|W\mu(a_0,x)|\le|W\mu(a_0,x_0)|$，则称$(a_0,x_0)$为小波变换模极大值点；尺度空间$\{(a,b),a>0,b>0\}$中的一条曲线$\Gamma$为小波变换模极大值线，若$\forall(a,b)\in\Gamma$，则$(a,b)$为在尺度$a$下的模极大值点。

利用这种小波变换模极大值方法可以较精确地检测信号奇异点的位置，但对于（多）分形来说，由于奇异点是非孤立的，这就很自然地涉及到跟踪问题，这是一个空白点。

总的说来，上述方法的不足之处可归结为下面两点：其一，在处理分形信号非孤立奇异点时没有跟踪能力，这就意味着分形在细节上有部分信息丢失，分形谱的计算就会失真；其二，局部极大值是在离散尺度上并且在局部某一尺度级水平上形成极大值线，在离散点(a_m,b_m)上计算要涉及大量的数值运算，此外也没有考虑极大值点附近的拓扑问题。

下面，在微分方程数值解的基础上，我们提出一种寻求最优尺度(a,b)来跟踪每一条极大值线的算法。

6．3．2 高斯函数的一些性质

为了减少计算量，了解测度函数$\mu(x)$中具有*Hölder*指数$h(x)<n$的所有奇异性，需要一个具有n阶消失矩的小波母函数。在这方面我们选择高斯函数作为母小波，它具有良好的局域性且容易满足消失矩的要求。

定义n阶高斯函数为

$$\psi_n(x)=\frac{d}{dx}\psi_{n-1}(x), \qquad \psi_0(x)=e^{-x^2/2}$$

$n>0$时 $$\psi_n(x)=\frac{d^n}{dx^n}\psi_0(x)$$

$n<0$时 $$\psi_n(x)=\int_0^x\psi_{n+1}(\xi)d\xi+C_n$$

令$C_{-1}=0$、$n=-1$，有$C(x)=\psi_{-1}(x)=\int_0^x e^{-\frac{\xi^2}{2}}d\xi$

于是$\forall n\in Z$，有下面的关系式成立：

$$(n+1)\psi_n(x)+x\psi_{n+1}(x)+\psi_{n+2}(x)=0, \qquad \cdots\cdots(6.3.1)$$

由此式可推知

$$\psi_n(x)=P_n(x)\psi_0(x)+Q_n(x)C(x), \quad (n\in Z)$$

其中$P_n(x)$和$Q_n(x)$均是多项式，有下面的递推规律成立：

$$(n+1)P_n(x)+xP_{n+1}(x)+P_{n+2}(x)=0$$

$$(n+1)Q_n(x)+xQ_{n+1}(x)+Q_{n+2}(x)=0$$

6．3．3 跟踪高斯小波极大值线的参数法

分形测度函数$\mu(x)$的高斯小波变换定义为

$$W^n\mu(a,b)=\frac{1}{a}\int_{-\infty}^{+\infty}\mu(x)\psi_n\left(\frac{x-b}{a}\right)dx，\quad (a,b\in\Re^1,a>0)$$

令 $y={x-b}/{a}$，则有 $\frac{dy}{da}=-\frac{y}{a}$

记 $W^n_{a^k b^l}\mu=\frac{d^k}{da^k}\cdot\frac{d^l}{db^l}(W^n\mu)$

由$(6.3.1)$式可以推知：

$$\frac{d^l}{db^l}\psi_n(y)=(-a)^{-l}\psi_{n+l}(y)$$

$$\frac{d^k}{da^k}\left(\frac{1}{a}\psi_n(y)\right)=\sum_{i=0}^{K}\frac{\lambda_k^i}{a^{k+1}}\psi_{n+2i}(y)$$

其中 $$\lambda_k^i=\begin{cases}\lambda_{k-1}^{i-1}+[(n+2i)-(k-1)] & 0\le i\le k\ne 0\\ 1 & i=k=0\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

$$\lambda_k^k=1，\quad \lambda_k^0=\prod\nolimits_{j=1}^{k}(n-j+1)，\quad (k>0)$$

于是可得到小波变换的导数运算表达式

$$W^n_{a^k b^l}\mu=\frac{(-1)^l}{a^{k+1}}\sum_{i=0}^{k}\lambda_k^i W^{n+l+2i}\mu=\frac{1}{a^k}\sum_{i=0}^{k}\lambda_k^i a^{2i}W^n_{b^{2i+l}}\mu$$

当$k=1$时，我们得到一个微分方程

$$aW^n_{b^2}\mu-W^n_a\mu+\frac{n}{a}W^n\mu=0， \quad\cdots\cdots(6.3.2)$$

对于给定的尺度a_0，在b_0处的局部极大值由下边两式确定

$$W^n_b\mu(a_0,b)\Big|_{b_0}=0，\quad \frac{\partial^2}{\partial b^2}(W^n\mu(a_0,b))^2\Big|_{b_0}<0$$

这些极大值点的连线叫极大值线。

前人的工作都是在离散尺度a_m和位置b_m情况下提取局部极大值，然后把这些极大值点连接起来。现在假定小波变换是实数连续的，我们相信，在一个最好尺度上所有极大值点都可以确定下来，而每一个极大值点均可看成一条极大值线的起始点。为此将a、b分别看成是参数t的函数$a(t)$、$b(t)$，以$(a(t),b(t))$来表达一条极大值线，这样沿该条极大值线极大值点的运动由下面的一个偏微分方程决定：

$$\frac{d}{dt}\left(W_b^n\mu\right)=W_{ba}^n\mu\frac{da}{dt}+W_{b^2}^n\mu\frac{db}{dt}=0$$

等价于 $$\frac{da}{dt}=-CW_{b^2}^n\mu,\quad \frac{db}{dt}=CW_{ba}^n\mu$$

在$W_b^n\mu=0$的前提下，可用 Runge Kutta 方法求解上述方程。

6.4 多分形测度小波变换极大值线的拓扑分析

当小波变换极大值点附近比较平滑或着在分岔点的邻域内，上述分析方法的效果就不太明显，因此有必要探讨这些极大值线的拓扑情况。

在局部静态分岔问题中，关于奇异点附近的函数性态，通常选用一些简单的多项式函数 GS 范式（芽）来表达[114],[118]。

将$W_b^n\mu(a,b)$在解$W_b^n\mu(a_0,b_0)=0$的邻域内展开为 Taylor 级数：

$$W_b^n\mu(a,b)=\sum_{i=o}^{\infty}\frac{1}{i!}\sum_{j=0}^{i}\binom{i}{j}\Delta a^{i-j}\Delta b^j W_{a^{i-j}b^{j+1}}^n\mu(a_0,b_0)=\mathrm{T}(\Delta a,\Delta b),\quad \cdots\cdots(6.4.1)$$

其中 $\Delta a=a-a_0$， $\Delta b=b-b_0$

假设$W_b^n\mu$在(a_0,b_0)处有$l-1$阶零点，即就是

$$W_{b^m}^n\mu(a_0,b_0)=\begin{cases}0 & 1\le m<l\\ \neq 0 & m=l\end{cases}$$

这里，取两个简单情况加以说明：当$l=2$时，(a_0,b_0)就是极大值线上的一正则点，而当$l=3$时就会有一个分岔点产生。

令 $s=\frac{\Delta a}{a}$， $t=\frac{\Delta b}{a}$， 由$(6.3.2)$式和$(6.4.1)$式可以推出

$$\mathrm{T}=\left(\frac{-1}{a}\right)^l W^{n+l}\mu\sum_{i=l}^{l-1}\frac{1}{i!}\binom{i}{1-l}s^{l-(i+1)}t^{2i-l+1}$$

$$-\frac{1}{a}\sum_{i=l^*}^{\infty}\frac{1}{i!}\sum_{j=0}^{Min(i,2i-l)}\binom{i}{j}s^{i-j}(-t)^j\sum_{K=0}^{i-j}\lambda_{i-j}^k W^{n+2k+j+1}\mu$$

当l为偶数时，$l'=l''=\frac{l}{2}$，而l为奇数时，$l'=l''-1=\frac{l-1}{2}$。

由于我们考察的问题是分岔点附近极大值线的拓扑情况，所以对s,t做一些限制是必要的。

令 $s=O(\varepsilon^2)$， $t=O(\varepsilon)$， $|\varepsilon|<<1$， ……(6.4.2)

在l奇偶性不同时，T分别用下面给出的T_1和T_2两个次数不超过$l-1$阶的多项式作为“芽”函数。

$$T_1=-\frac{1}{a}W^{n+l}\mu\sum_{i=0}^{l'}\frac{1}{i!}\binom{l'+i}{2i}s^{l'-i}t^{2i},\quad l'=\frac{l-1}{2},\quad l\text{为奇数}，\quad \cdots\cdots(6.4.3)$$

$$T_2=\frac{1}{a}tW^{n+l}\mu\sum_{i=0}^{l'}\frac{1}{i!}\binom{l'+i+1}{2i+1}s^{l'-i}t^{2i},\quad l'=\frac{l-2}{2},\quad l\text{为偶数}，\quad \cdots\cdots(6.4.4)$$

讨论：当l为偶数时，(6.4.4)式中$t=\frac{\Delta b}{a}$总是$T_2=0$的一个解。在这种情况下，无论$\Delta a>0$或$\Delta a<0$，一条极大值线都会沿着两个方向发展；而当l为奇数时，由于t始终为偶数次幂，在$\Delta a<0$时，T_1就会减小。在这种情形下，随着a的增大，分岔点处的极大值线也就不可能产生分裂。

在$\Delta a<0$时，为了得到分岔点附近的近似解，根据(6.4.2)式的要求，不妨令$s=Ct^2$，代入(6.4.3)式和(6.4.4)式得到

$$T_1=-\frac{1}{a}t^{l-1}W^{n+l}\mu\sum_{i=0}^{l'}\frac{1}{i!}\binom{i+l'}{2i}C^{l'-i}=0,\quad l'=\frac{l-1}{2}$$

$$T_2=\frac{1}{a}t^{l-1}W^{n+l}\mu\sum_{i=0}^{l'}\frac{1}{i!}\binom{l'+i+1}{2i+1}C^{l'-i}=0,\quad l'=\frac{l-2}{2}$$

对于每一个l，C不依赖于n和a，给C赋值，就可以确定一条抛物线。在平面(s,t)内，在一个分岔点(a_0,b_0)处交汇的所有极大值线都是抛物线，由曲率和点值就可以确定这些极大值线在(a_0,b_0)附近的分布情况。

6.5 基于小波变换模极大值的多重分形谱的计算

从以上分析可以看出，小波变换模极大值线(L)结构已经包含了奇异性的必要信息，但由于分形的奇异点是非孤立性的，要计算点态奇异指数$\alpha(x_0)$是很困难的。为此，我们借助由 Arneodo、Bacry 等人[116]引入的一个和函数$S(q,a)$（该函数可被用来测量所有小波变换模值q次幂的和）通过小波变换局部极大值来测量多分形谱。

$$S(q,a)=\sum_{i\in L_i}\left|W_\psi\mu(a,b_i)\right|^q$$

其中$\left|W_\psi\mu(a,b_i)\right|\sim a^{\alpha(x_0)+1/2}$，$b_i$代表在尺度$a$下第$i$个极大值线的位置。

计算多分形谱D_q的经典方法是由下式估算$\tau(q)$：

$$S(q,a)\sim a^{\tau(q)}$$

然后通过 Legender 变换得到$D_q=\tau(q)/(q-1)$。然而在实际应用中由于数据集噪声和有限长度的缘故，就会有许多问题产生。为此我们将做下面的两项工作。

在每一尺度a下，对于某个$\varepsilon>0$，假设任何相邻的极大值点b_i、b_{i+1}有一段距离$\left|b_{i+1}-b_i\right|>\varepsilon$，否则在区间$\varepsilon$上，$S(a,q)$仅包含最大幅度的极大值，这样$S(a,q)$就不至于由于快速震荡产生的较近极大值引发的数值骤增。

对于$S(a,q)$，当$q<0$时，由于极大值线上点附近的小波变换模值很小，而$S(a,q)$值主要依赖于较小幅度的小波变换模值，这样$S(a,q)$计算就缺乏稳定性。为了避免这种不稳定性，对于小于a的所有尺度上每一个极大值点处的小波变换模极大值用沿对应极大值线小波变换模极大值的上确界代替。

在每一尺度a下，我们定义一个类似于“概率”的量$P_i(q,a)$

$$P_i(q,a)=\left|W_\psi\mu(a,b_i)\right|/S(q,a)$$

于是广义次信息量维数$D(q)$为：

$$D(q)=\lim_{a\to 0}\frac{1}{q-1}\frac{\sum P_i(q,a)\ln P_i(q,a)}{\ln a},\qquad (q\neq 1)$$

再由第二节有关推导结果，求得奇异性指数$\alpha(q)=\frac{d}{dq}[(q-1)D(q)]$，同时多分形奇异性谱（分形集的 Hausdorff 维数）为：

$$f(\alpha)=q\alpha(q)-(q-1)D(q)$$

6.6 仿真算例分析

例 1：在小波变换极大值处理方面，分形信号的奇异性和一般信号奇异性有所不同。图 6.1(a)为原始波形信号，在[50,100]一段包含了一个分形结构，采用高斯函数作为母小波，对其进行小波变换极大值分析。图 6.1(b)显示了两类信号不同的表现：在$t=160$处的小波变换极值在各尺度下都可以很好地跟踪，而在$t=70$处的小波变换极值在$j<4$的情况下分裂成多个极值点，跟踪问题由此产生了。

例 2：以概率 $p_1 = 0.4$ 和 $p_2 = 0.6$ 的魔鬼阶梯（见图 6.2(a)）为例，用文中方法计算其谱维数。小波函数 $\psi = -\theta'$，θ 为高斯函数。图 6.2(b)显示基于极大值方法的多分形谱(+号曲线) $f(\alpha)$ 和用 Legendre 变换方法所计算的谱比较接近。

6.7 本章小结

在本章，首先介绍了多分形谱的两套描述语言：$\alpha - f(\alpha)$ 语言和 $q - D_q$ 语言，分析了现今有关多分形谱奇异性刻画方面存在的问题，提出了基于高斯小波函数跟踪极大值线的一种尺度参数化 $(a(t), b(t))$ 方法。

在第四节里，针对极大值分岔点附近的性态，引入了两个多项式函数 T_1、T_2 作为芽函数，探究了出现分岔点的可能性。

文中第五节，多分形谱奇异性的几乎所有信息都包含在极大值线结构中，为此我们仿照信息量维数的定义，基于小波变换模极大值，提出了多分形谱的一种估算方法。

最后，列举了两个范例。其中第一个例子采用了包含一段分形结构的信号，经小波极大值处理后，从图上可以看出，分形的极大值点出现分裂，有必要进行跟踪。第二范例则以一个魔鬼的阶梯为例，显示了文中提出的谱估算方法是有效的。

在多分形谱的研究过程中，本人认为，尚有必要在以下方面进一步深入下去：

要正确地揭示多分形体时空演变的动力学过程，和本论文第四章提出的单分形时变维数一样，有必要对多分形引入时变维谱的概念，可考虑从下面的两个途径开展研究：

（1）仿照现代信号处理中有关时变谱的分析理论，用小波分析手段处理时变维谱。

（2）采用 Marcov 过程理论对多分形时变维谱的漂移加以刻画。

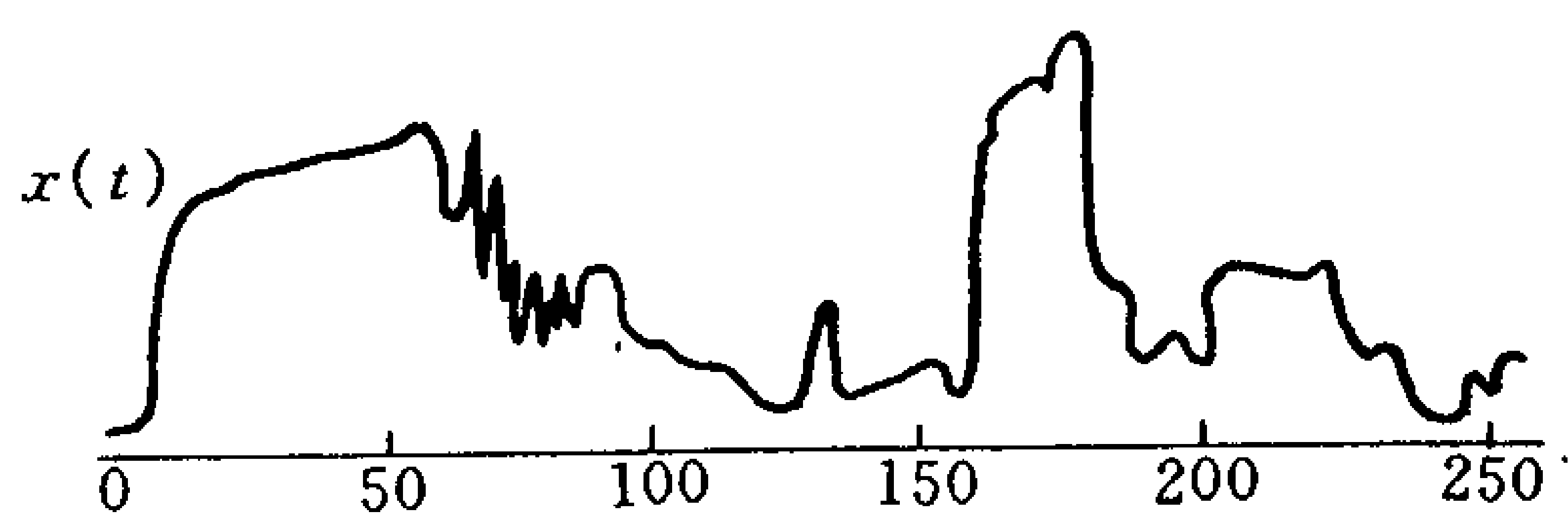


图 6.1(a) 包含 [50，100]一段分形信号的原始波形

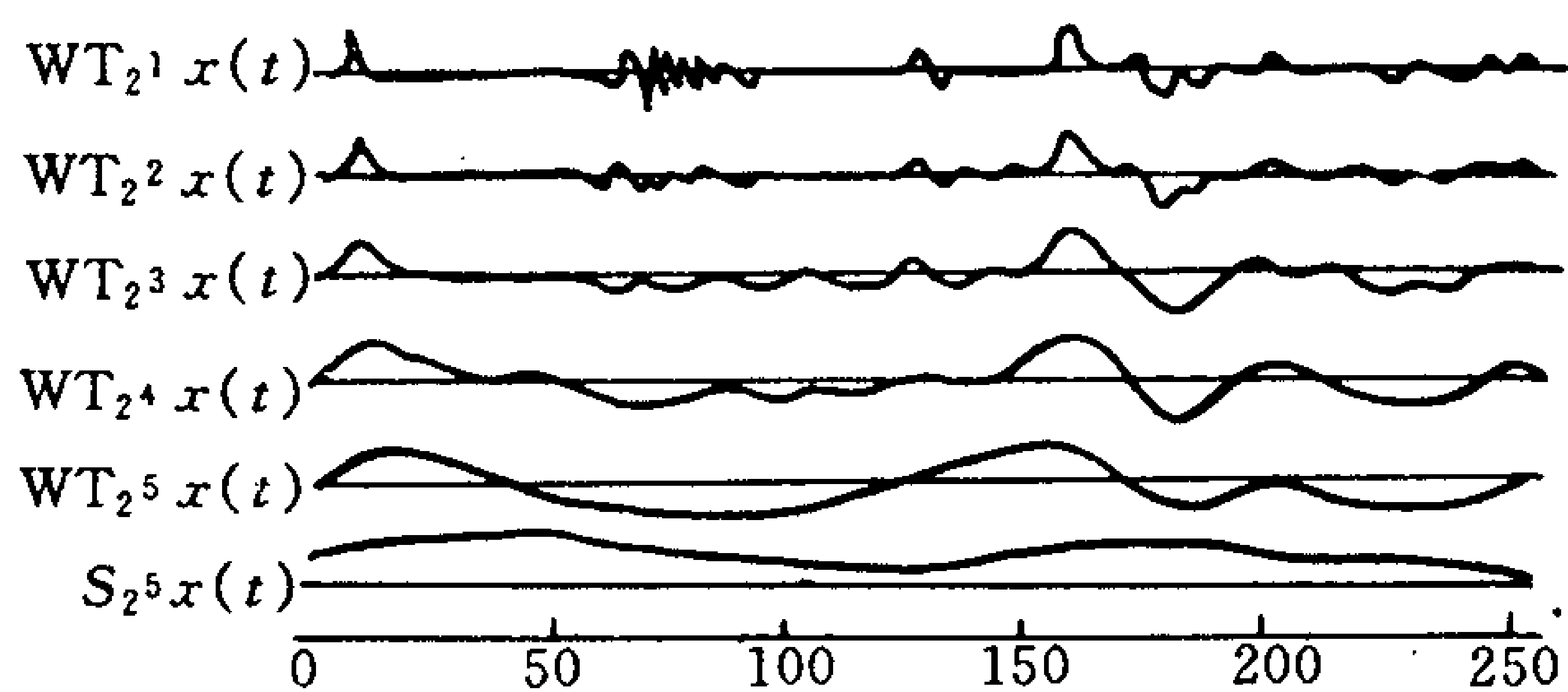


图 6.1(b) [50，100]一段难以进行小波变换极大值跟踪

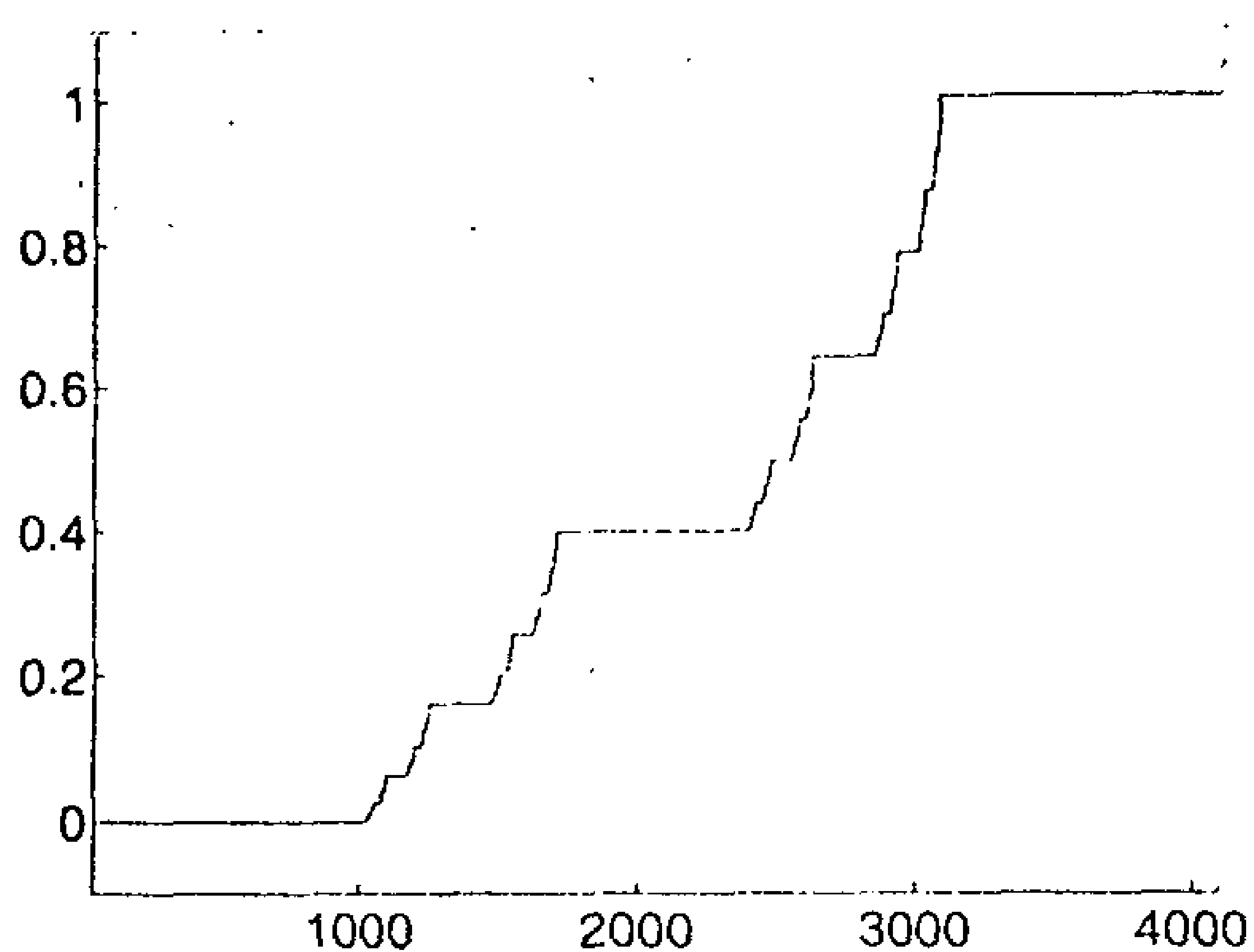


图 6.2(a) $p_1 = 0.4$ 和 $p_2 = 0.6$ 的魔鬼阶梯

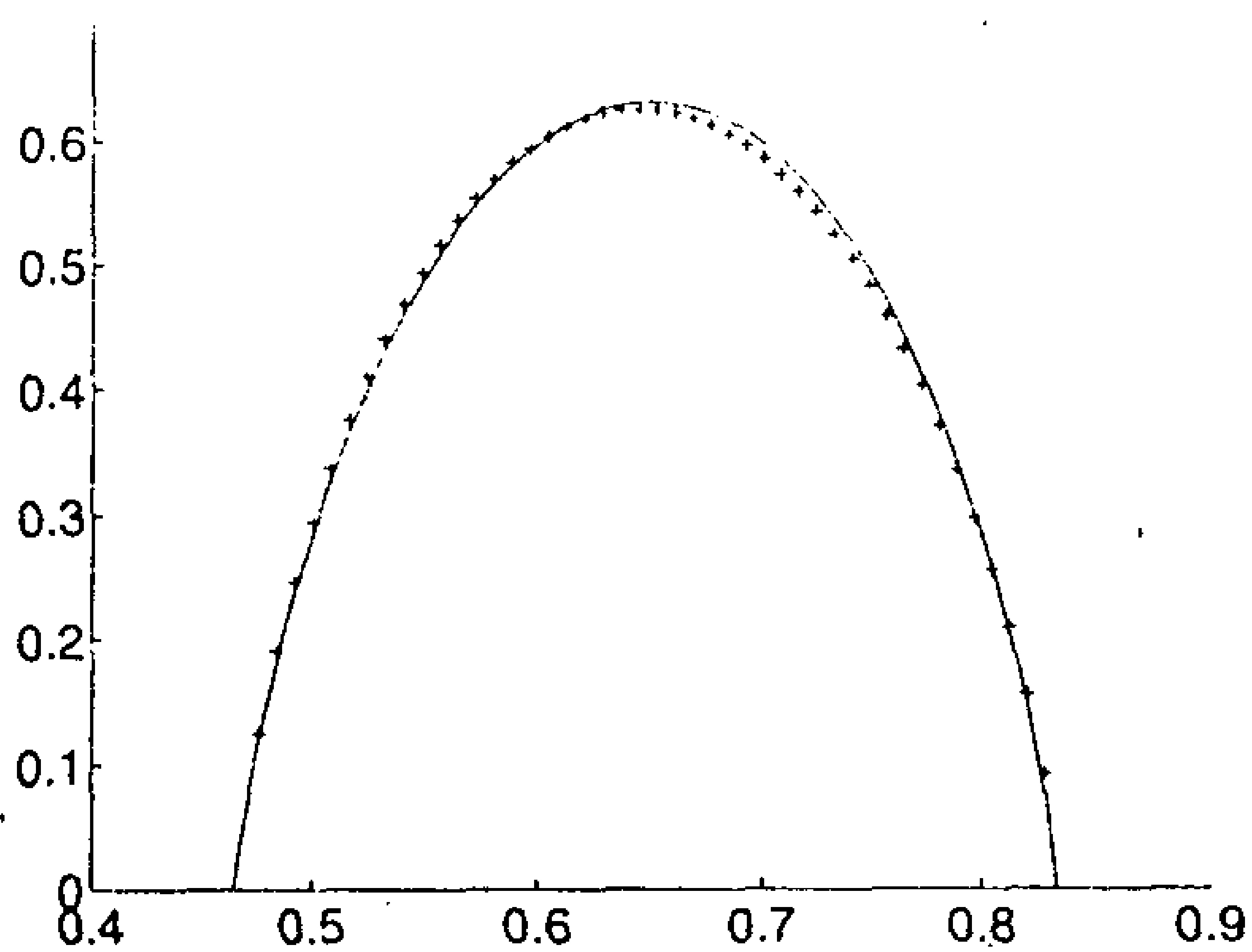


图 6.2(b) 基于极大值方法的多分形谱 $f(\alpha)$ 和用 Legendre 方法所计算的谱，前者为+号曲线，后者为实曲线。

第七章　结论与展望

小波理论中的多分辨分析思想，体现了人们认识和识别形体的过程遵循了一种从低分辨率到高分辨率的原理。对于分形的观察也正是这样的方式。从大到小的尺度变换，在越来越小的尺码上观察越来越丰富的分形细节问题。小波分析和分形具有深刻的内在联系，两者在尺度变换上具有一致性，分形是一种几何语言，而小波是一种分析局域奇异性和非平稳性的工具，两者相得益彰。

小波从诞生到现在不过十几年的时间，已经有了坚实的理论基础和广阔的应用领域，而分形理论和小波相比虽然起步比较早，但因其“离经叛道”的反常性和独立性不易为大多数的人们所接受，况且本身的理论基础尚建立得不够牢固，发展研究因此就相对显得较为缓慢。小波分析工具从开始进入分形领域至今则短短不到十年的时间，取得了一些可喜的成果，但分形理论中有许多存在的问题，还有待借助包括小波分析在内的方法去解决，已有基于小波方法的结果也有不足之处。但我们可以确信的是，小波分析的引入犹如催化剂增添了分形研究的活力，能够为分形理论的进一步发展和应用起到一定的促进作用。

基于以上理念和思路，在前人工作的基础上，本文利用小波工具就分形理论有关问题进行了较为深入的探讨。

本文的主要工作和创新之处可归纳为以下几个方面：

1. 分析了分形曲线维数的传统计算方法及其缺陷，提出多分维分形曲线的模式。
2. 基于小波阈值去噪方法，给出曲线上点的局部分形维数的计算公式及算法。通过收敛性的证明，该方法可以有效地保留其分形维数。仿真计算结果表明该方法是有效的。
3. 在处理分形反问题方面，和前人所选特征点不同，我们的做法是选择小波变换零点作为特征点，处理对象定位于分形插值函数。
4. 基于小波变换在零点具有的的保相似形特征，在已知分形插值函数图象情况下，从有限数目个零点出发，给出了寻找一组仿射压缩变换使该函数图象成为未知迭代函数系统吸引子的一种构造方法。算例结果也验证该算法的有效性。
5. 提出了分形时变维数的概念，并将其引入两类具有局部自相似性的有偏随机过程中。
6. 借助小波基固适合于分析非平稳性和局部自相似性这一特点，给出 Hurst

指数的小波估算公式及算法，证明了小波估算值$\hat{H}(t)$和真实值$H(t)$是相容的，并用仿真结果加以验证。

7. 利用时变 Hurst 指数理论对上海股票市场周指数变化进行了实证分析，结果表明该理论对投资决策有指导意义。
8. 分析了$1/f$过程的小波变换系数之间在相关结构上的特点以及小波消失矩的大小对系数相关性衰减性的影响。
9. 借助小波变换对自相似过程所起的白化作用和最小二乘法，在无须知道$1/f$过程中参数分布的情况下，给出了基于小波系数方差结构的谱参数γ的估算式。用仿真对方法的有效性进行了验证，结果较为满意。
10. 提出在最优尺度上跟踪小波模极大值线的参数方法，为研究多分形谱奇异性提供了一种途径，可节省大量的运算量。
11. 选取了小波变换在分岔点邻域 Taylor 级数展开中的两个多项式函数作芽函数，探讨了分形测度小波变换极大值线的拓扑分岔情况。
12. 提出了一种基于小波变换模极大值的多重分形谱估算方法，以“魔鬼的阶梯”为例对该方法的有效性加以验证，取得了和 Legendre 变换方法几乎相同的结果。

在分形理论的研究过程中，本人认为，有必要在以下几个方面尚待进一步深入探讨：

1. 为了能够完整地刻画多分形体在时空中演变的动力学过程，有必要引入时变维谱的概念。仿照现代信号处理中有关时变谱的分析理论，用小波分析手段处理时变维谱。
2. 采用 Marcov 过程理论对多分形时变维谱的漂移加以刻画。
3. 由小波变换值的关系可以反推分形的变换关系，然而，这种反推是否确定唯一的分形？这是一个尚待解决的问题。
4. 对于非相似分形（如圆和椭圆、球和椭球）的小波分析反演，这必然涉及尺度参量应该为 n 维对角矩阵的小波函数。

$$\varphi(x)=\sum_{b\in Z^d}a_b\varphi(Ax-b),\quad A\text{为一对角矩阵。}$$

有关这种小波函数的研究已有不少。尽快地将其用于这类分形，这也是以后反演工作的一个研究方向。

致谢

本文的完成，是我四年多来攻读博士学位期间工作的一个总结。在这里，谨向所有给予我真诚关心与帮助的良师益友表示衷心的谢意。

首先，我要感谢我的导师宋国乡教授,在这几年里能够成为宋老师的学生，亲聆她的教诲，是我毕生的受益和荣幸，我所学小波分析方面的知识都是她传授的。作为导师，宋教授有敏锐的科学直觉和预见性。早在两年前，宋老师就关注着分形这门新兴学科的发展动向，并认识到了利用小波处理分形问题的可能性和潜力，还特别邀请南京大学数学系博士生导师苏维宜教授来系讲学，苏教授介绍了国家“863”计划中分形领域的研究情况,和苏教授的交流开拓了我的视野,使我能够更快地接触到分形领域的前沿问题，从而为我进入这一领域创造了一个良好的开端。更为重要的是，宋老师对科学始终如一的不懈追求，一丝不苟的治学态度，诚信豁达的胸襟气度，慈蔼睿智、诲人不倦的师者风范为我展现了一位科学工作者的思想境界与人格魅力，是我今后治学与做人的榜样。

本文的写作也得益于和王卫卫博士、冯象初博士、赵瑞珍博士、屈汉章博士、王军锋博士、刘宜会博士、应益荣博士等人的讨论，在此表示由衷的感谢。

感谢西安电子科技大学应用数学系领导和同事们。陈开周教授和刘三阳教授在我的求学过程中给予了很大的帮助，在此表示衷心的感谢。

感谢西安电子科技大学研究生院焦李成教授、石增喜和秦荣等老师在求学期间中对我的关心和帮助。

深深地怀念我的母亲，感谢母亲对我的养育之恩。她没能等到今天，这是我极大的痛楚和遗憾。她那善良朴实、吃苦耐劳和不惧困难的品质深深地扎根于我的心灵，始终是激励我一生前进的源泉和动力。

深深感谢我的岳父和岳母，他们含辛茹苦照看我们可爱的小女儿，在精神与生活上支持和照顾我，使我得以安心于书桌之前。

我要特别感谢我的爱人赵慧博士，她在生活上及精神上给了我无微不至的关怀和帮助，没有她多年来的支持，我的学业和本文的完成是不可想象的。

参考文献

[1]Mandelbrot B.B.,The Fractal Geometry of Nature,San Francisco,W.H.Freeman and Co., 1982

[2]Falconer K.J.,Fractal Geometry:Mathematical Foundation and Application,Wiley,New York, 1990

[3] Barnsley,M.F., Fractals Everywhere, Academic Press, Orlando, 1988

[4]Mandelbrot B.B.,Van Ness J.W.,FractionalBrownian motion,fractional noise and applications,SIAM Review, 1968, 10, 422-437

[5]LindstiomT.,Browian motion on nest fractals,Mem.Amer.Math.Soc., 1990, 420

[6]Hambly B.,Brownian motion on a homogeneous random fractals,Probab.Th.Rel.Fields, 1992, 94, 1-38

[7]Barnsley M.F.and Demko S.,Iterated function systems and the global construction of fractal,The Proceedings of the Royal Society,London,A399, 1985, ,243-275

[8]Barnsley M.F.,Fractal function and interpolation,Constructive Approximation, 1986,2,303-329

[9]Barnsley M.F.,EltonJ.,Hardin,D.Hidden variable fractal interpolation functin,Georgia Institute of Technology,Preprint, July, 1986

[10]Demko S.,Hodges L. And Naylor B.,Construction of fractal objects with iterated funtion system,Computer Graphics, 1985, 19(3), 271-178

[11]谢和平等编译，分形几何——数学基础与应用，重庆大学出版社，1991

[12]李后强，分形理论及其在分子科学中的应用，科学出版社，1993

[13]文志英，井竹君，分形几何和分维数，数学的实践与认识，第四期,1995

[14]苏维宜，分形与局部紧群上的调和分析，非线性论文集,1990

[15]熊金成，符号空间转移字映射混沌集合的 Hausdorff 维数，中国科学，1994, 第 25 期,第 2 期

[17]吴敏，一类递归集的 Hausdorff 维数及 Bouligand 维数，数学学报，1995，第 38 卷，第 2 期

[18] 吴敏，关于自相似集的一个维数定理，数学学报，1995，第 38 卷，第 3 期

[19]江惠坤，$\mathfrak{R}^n$ 上分形集的多重维数，数学年刊，1995，16A，1

[20]胡迪鹤，随机分形，数学进展，1995, 第 18 卷，第 1 期，193-214

[21]胡晓予，Cantor 集随机重排的 Hausdorff 测度，中国科学（A），1994，第 24 卷，第 8 期

[22]胡晓予，Cantor 集随机重排的 Packing 测度，中国科学（A），1994，第 24 卷，第 9 期

[23]谢和平，分形力学的数学基础，力学进展，1995，第 25 卷，第 2 期，193-214

[24]Falconer K.J.著，分形几何，曾文曲等译，东北工学院出版社，1991，301-307

[25]段虞荣，高如曾等，用分形理论和小波变换相结合的方法来选择油气田的勘探井位，分形理论及其应用（三），中国科学技术大学出版社，1993，366-372

[26] 李后强，分形研究的若干问题及动向，分形理论及其应用（三），中国科学技术大学出版社，1993，1-4

[27]汪富泉，李后强，有面积的曲线的性质及高维推广，数学研究与评论，1994，14（4），579-584

[28] 李后强，方曙，分形的若干进展，自然杂志，1991，14（4），245-252

[29] 汪富泉等，多重分形：热力学类比，相变与子波变化，大自然探索，1991，11（2），56-59

[30] Arneodo,A.,Bacry,E.,Muzy,J.F.,Solving the Inverse Fractal Problem from wavelet analysis,Europhysics Letters , 1995, Vol.25, No.7, 484-497

[31]Forte,B.,Vrscay,E.,Solving the Inverse Problem for Function Approximation using Iterated Function systems,Fractals, 1994, Vol.2, NO.3, 325-346

[32]Fisher,Y., Fractal Image Compression,Theory and Application. Springer-Verlag,New York, 1994

[33]朱治军，李后强，用小波分析进行分形反演的理论研究，非线性科学的理论、方法和应用，科学出版社，1997， 10-20

[34]Brockwell,P.J.,Time series:Theory and Methods,New York:Springer-Verlag,1991

[35]Evertsz C.J.and Berkner K.,Large deviation and self-similarity analysis of curves:DAX Stock Prices，Chaos,Solitons & Fractals, 1995, 6, 1221-1230

[36]敖力布等，分形学导论，内蒙古人民出版社，1996，476-477

[37]Daubechies I.,The wavelet transform:Time-Frequency Localization and Signal Analysis,IEEE.Trans.On Information Theory, 1990, 36(5), 132-165

[38]Stromberg.J.O.A , Modified Franklin system and higher order spline system on as unconditional bases for Hardy spaces. In:BecknerW.Conf in honer of A Zygmud. New York:Academic Press. 1986, 475-493

[39]MorletJ.,Wave propagation and samyding theory and complex waves . Geophysics, 1982, 47(2), 222-236

[40]Meyer.Y., .Wavelet with compact support. In:Beckner W.Conf in honor of A .Zygymund .New York: Academic Press, 1986, 1-8

[41]Mallat.S.A , theory for multiresolution signal decomposition: The wavelet representation. IEEE Trans on PAMI, 1989, 11(7), 476-693

[42]Hall,P. And Wood,A.On the performance of box-counting estimatiors of fractal dimension,Biometrika,1993,80,246-252

[43]Chui.C.K.Wavelet: A tutorial theory and applications.New York:Academic Press, 1992, 1-453

[44]Lawton,Necessary and sufficient conditions for constructing orthornormal wavelet bases,J.math.Phys., 1991， 32, 57-61

[45]王晓军等，一种快速图象识别算法，数据采集与处理，1996，第 11 卷，第 2 期，246-248

[46]埃得加.E.彼得斯，资本市场的混沌与秩序，经济科学出版社，1999，64-83

[47] Daubechies.I.,Ten lectures on wavelets ,SIAM,Philadephia, 1992

[48]张济中，分形，北京：清华大学出版社，1995，209-214

[49]林鸿益，分形论-奇异性探索，北京：北京理工大学出版社，1992

[50]秦前清，杨宗凯，实用小波分析，西安：西安电子科技大学出版社， 1994

[51]Mallat.S.A , theory for multiresolution signal decomposition: The wavelet representation. IEEE Trans on PAMI, 1989, 11(7), 476~693

[52]MegerY.ondeletles et Operateurs.Paris:Herman Press, 1990, 1~175

[53]Chui.C.K., On cardinal spline wavelets, Ruskai et al. 1992, 419~438

[54]Cohen and Daubechies,Othonormal bases of compactly supported wavelets III:Better frequency localization, AT T Bell Laboratories preprint, submitted to SIAMJ.Math. Anal. , 1990

[55]Mallat.S, Zhong.S, Characterization of Signal from Multiscale Edges[J], IEEE Trans.PAMI, 1992, 14(7), 710-732

[56]Adelheid, Fischer,On wavelets and prewavelets with vanishing moments in higher dimensions .Journal of Approximation Theory, 1997, (90), 46-74

[57]张颖等，基于分形和小波的自适应混合图象编码，电子学报，1998，26（10）70-74

[58]Chui.C.K.Wavelet: A tutorial theory and applications.New York:Academic Press, 1992, 1-453

[59]Frederique M, Dominique G, Matthias H et al, Wavelet analysis of potential fields, Inverse Problems, 1997, (13), 165-168

[60]Hong-Tae S, Hans V, On the Gibbs Phenomenon for wavelet expansions, Journal of approximation theory, 1996, (84), 74-95

[61]王建忠，小波理论及其在物理和工程中的应用，数学进展，1992，21（3）,289-316

[62]Zhang Q and Benveniste A., Wavelet network, IEEE Trans:Neural Network, 1992, Vol.4, No.6, 213-217

[63]王玉宁，多尺度B样条小波边沿检测算子，中国科学（A辑），1995，25（4）：426-437

[64]Stephere G M, Zero-crossing of wavelet transform, IEEE Trans IT, 1991, 37(4):1019-1033

[65]Mallat A and Huang W L, Sigularity detection and processing with wavelets, IEEE Trans. Information theory, 1992, 38(2):617-643

[67]M. Vetterli, Wavelets and fiter bank:Theory and Design, IEEE Trans. Signal Processing, 40(9), Sep, 1992

[68]S. Mallat, A theory for multi-resolution signal decomposition:The wavelet representation, IEEE Trans. Patt. Anal. Machine Intel. 1989, 11(7):674-693

[69]Antonini M, Barland M, Mathien P, et al, Image coding using wavelet transform, IEEE Trans Image Proc. Jan , 1992, 1:205-220

[70]Averbuch A, Lazar D, Israeli M, Image compression using wavelet transform and multiresolution decompesition, IEEE trans Image Proc, Jan, 1996, 5:4-15

[71]Mallat S G, Multisolution approximation and wavelet orthonormal bases of $L^2(R)$, Trans of American Math Sco, Sept, 1989, 315:69-87

[72]Daubechies I, Orthonormal base of compactly supported wavelets. Comm Pure Appl Math, 1988, 41:909-996

[73]A Lewis, G Kowles, Image compression using the 2-D wavelet transform, IEEE Trans on Image Processing, Apr, 1992, IP-1, 2:244-250

[74]Stephere G.mallat,A theory for multiresolution signal decomposition: the wavelet represention,IEEE Trans on PAMI, Jul, 1989, PAMI, 11(7), 674-693

[75]侯遵泽、杨文采，小波分析应用研究，物探化探计算技术，1995，17（3）

[76]M V Wicherhauser,Lectures on wavelet packet algorithms,1991,15

[77]杜丽英、吴疗刚、徐国明，紧支集标准正交小波基地震数据的分解和重建，大庆石油地址开发，1995

[78]赵辉，孙博文，关于分形理论研究中若干问题的思考，非线性论文集，1990，5-7

[79]何峻湘，WVD 用于 SAR 运动目标检测和成象的参数估计，电子科学学刊，1995，17（6）：585-590

[80]王晓菊、马远良，基于小波收缩去噪方法的信号特征提取，自动化理论、技术与应用（第四卷），杭州：浙江工业出版社，1997，1002-1005

[81]ResenikoffHL,wavelet and adaptive signal processing ,SPIE,Adaptive Processing 1991,15:370-382

[82]QianS,WeissJ,wavelet and numberical solution of partial differential equations,J.of computational physics , 1991, 106-199

[83]Grossmann A,et al ,Reading and understanding continuious wavelet transforms, Wavelets conf,Marseille, 1989, 2-20

[84] MeyerY., Wavelet:Algorithms&Applications, NewYork:SIAM, 1993, 211-340

[85]Massopust,P.R.,Fractal Functions,Fractal Surfaces,and Wavelets,New York:Academic Press,1994

[86]William T,Application of wavelet analysis to inverse scattering:II, Inverse Problems,1996,12:499-516

[87]Bernard D and Anatoli J,On the computation of wavelet coefficients, Journal of Approximation theory .1997, 88. 47-79

[88]Ewald Q and Normann W,Algorithms for spline wavelet packets on an interval.BIT. 1997. 37:1. 76-95

[89]侯建荣,宋国乡，高维正交小波基的构造及应用，中国科协第三届青年学术会，1999

[90]Li Houqiang,Chen Shuhua and Zhao Huaming,Fractal structure and conformational entropy of protein chain,Int.J.Biol.Macromol, 1990, 12, 374-378

[91]李后强，酶及其模型物的研究，四川大学博士学位论文，1991。
[92]李后强，高分子的分维研究，大自然探索，1988，8（2），35-39
[93]Arneodo,A.,Argoul,F.,Muzy,J.F.,Fractals,1993, 1(3), 629-638
[94]Struzik,Z.R.From coastline length to inverse fractal problem:The concept of fractal metrology,Wibro Disserta Tie Drukkerij,Helmond, 1996.
[95]Handy,C.R.and Mantica,G.Inverse problem in fractal constructions moment method solution,Physica D, 1990, 43, 17-36
[96]吴敏金，分形信息导论，上海科学技术文献出版社，1993
[97]Kantz,S.G.,Mandelbrot.B.B.数学译林，1992，11（4），337-345
[98]张永平，谢和平，分形函数与分形维数，MMM-IV 论文集，兰州大学出版社，1991
[99]Geweke,J., and Porter-Hudak,S.,The estimation and application of long-memory time series models,Journal of time series analysis, 1983, 4, 227-237
[100]Donoho,D.L.,and Johnstone,I.M.,Ideal spatial adaptation by wavelet shrinkage , Biometrika,1994,81,425-455
[101]Flandrin,P.,and Ganclaves,P.,From wavelets to time-scale energy distributions,in Recent advances in wavelet analysis,eds.Schumake and Webb,Boston:Academic Press, 1994, 309-334
[102]宋国乡等，一种基于小波变换的白噪声消噪方法的改进，西安电子科技大学学报，2000，27（5），619-622
[103]叶中行，杨利平，上证指数的混沌特征分析，上海交通大学学报，1998，32（3），129-132
[104]Tricot,C.Curves and Fractal Dimension,New York:Springer-Verlag,1995
[105]Rudolf H.Riedi,Vinay J.Ribeiro,A multifractal wavelet model with application to network traffic,IEEE Trans.on Information Theory, 1999, Vol.45,No.3, 992-1018
[106]王东生，曹磊，混沌、分形及其应用，中国科学技术出版社，1995，104-138
[107]B.Logan,Information in the zero-cross of band pass signals,Bell Syst.Tech.J., 1977, 56, 510-532
[108]A.E.Cetin,et al.,Signal recovery from wavelet transform maxima,IEEE Trans.SP-42(1), 1994, 194-196
[109]G.Wornell,Wavelet-based representation for the 1/f family of fractal process, Pro.IEEE, 1992, 11(2), 65-70

[110]G.Wornell, A Karhunen-Loeve like expansion for 1/f process via wavelet, IEEE Trans.,1990,IT-36(4),859-861

[111]G.Wornell,Signal Processing with Fractals:A Wavelet Based Approach, Prentice-Hall, 1995

[112]A.Tewfik,et al.,Correlation structure of the discrete wavelet coefficients of fractional Browian motion, IEEE Trans. IT-38(2), 1992, 904-909

[113]M.Kesner, 1/f noise,Proc. IEEE, 1982, 70, 212-218

[114]Melbourne,I.,The recognition problem for equivariant sigularity,Nonlinerarity, 1988,1,215-240

[115]G.Wornell,Wavelet based representation for a class of self similar signals with application to fractal modulation, IEEE Tran., IT-38(2), 1992, 785-800

[116]J.F.Muzy,E.Bacry and A.Arneodo,Int.J.Bif. and Chaos, 1994, 4, 245-253

[117]侯建荣，宋国乡，高维正交小波基的构造浅析，西安电子科技大学学报，2000，27（1），123-125

[118]唐云，对称性分岔理论基础，科学出版社，1998，25-58

[119]焦李成、保铮，子波理论与应用：进展与展望，电子学报，1993，21（7）：91-97

[120]徐科，徐金梧，一种新的基于小波变换的白噪声消除方法，电子科学学刊，1999，21（5），706-709

[121]G.W.Wornell and A.V.Oppenheim,Estimation of fractal signals from noisy measurements using wavelets, IEEE Tran., 1992, Vol.40, 611-623.

[122]宋国乡等，数值泛函及小波分析初步，河南科学技术出版社，1993

[123]陈捷，陈克安，孙进才，叠加分数布朗运动的极大似然估计，信号处理，1999，第15卷，第2期，143-151

在读期间发表的论文

1. 侯建荣，宋国乡，高维正交小波基的构造，西安电子科技大学学报，2000，27（1）
2. 侯建荣，宋国乡，追求最大效益的集成优化设计，西安电子科技大学学报，1998，25（2）
3. 侯建荣，宋国乡，自相似分形插值函数反问题的小波解法，计算机科学，2001，N0.8
4. 赵慧，侯建荣，Extranet及其相关标准，计算机科学，1998，1（25）
5. 侯建荣，宋国乡，小波分析在股票有偏随机游动中的应用，西北大学学报，2001, N0.5
6. 侯建荣，宋国乡，小波方法在指数估值中的应用，西安电子科技大学学报，(已录)
7. 侯建荣，宋国乡，高维小波基的构造及应用，新世纪科学论坛-中国科协第三界青年学术年会会议论文集，陕西科学技术出版社，1999
8. 侯建荣，宋国乡，一种计算多分维曲线局部维数的小波方法，应用数学学报（已投）
9. 侯建荣，宋国乡，时变Hurst指数的小波计算方法及其在投资决策中的应用，系统工程理论与实践，（已投）
10. 侯建荣，宋国乡，在最优尺度上跟踪小波模极大值线的参数方法，应用数学与力学，（已投）
11. 张彬，侯建荣，宋国乡，$L^2([a,b]^2)$上的小波分解与重构算法，西北大学学报，（已投）

分形理论中若干问题的小波解法